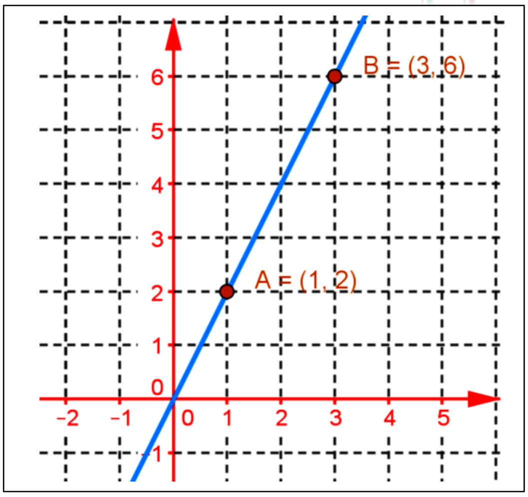
I. Rappel :



1. Coefficient directeur et vecteur directeur d'une droite :

On considère la droite (AB) passant $A(1,2)$ et $B(3,6)$.

- Le coefficient directeur est : $m=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{6-2}{3-1}=2$.
- Vecteur directeur est : $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\m\end{pmatrix}=\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$.
- Equation cartésienne de (AB) est de la forme
  $(AB):y=m(x-x_A)+y_A$
- (aussi $(AB):y=m(x-x_B)+y_B$. d'où équation cartésienne de (AB) est
  $(AB):y=2(x-1)+2=2x$ ou encore : $(AB):y=2(x-3)+6=2x$.

2. Vitesse moyenne :

- Lorsque la vitesse d parcourue par solide en mouvement est exprimée en fonction du temps t .
  on a la distance d parcourue par ce solide à l'instant t est $d(t)=f(t)$.
- La vitesse moyenne c'est la vitesse du solide entre l'instant t_1 et t_2 est
  $$V_m[t_1,t_2]=\frac{\Delta_d}{\Delta_t}=\frac{d(t_2)-d(t_1)}{t_2-t_1}=\frac{f(t_2)-f(t_1)}{t_2-t_1}$$.
- Exemple :
  On suppose que la distance traverser par un solide en mouvement est exprimée en fonction du temps t est $d(t)=f(t)=10t^2$ tel que d est exprimée en km et t en h $(heure)$.
  On calcule la vitesse moyenne du solide entre $t_1=1h$ et $t_1=2h$ on a
  $$V_m[t_1,t_2]=V_m[1,2]=\frac{\Delta_d}{\Delta_t}=\frac{d(2)-d(1)}{2-1}=\frac{f(2)-f(1)}{2-1}=\frac{40-10}{1}=30\ km/h$$ .0

  Remarque :
  - ❖ Les physiciens exprime les variation par Δ .

  Exemple :

- les variances entre les abscisses x_1 et x_2 est $\Delta x=x_2-x_1$.
- Les variations entre les ordonnées est $y_1=f(x_1)$ et $y_2=f(x_2)$ est $\Delta y=y_2-y_1$.

  - ❖ Les petites variations sont exprimées par d.

  Exemple :

- On considère $x_2=x_1+h$ donc $\Delta x=h$ et on considère h tends vers 0 dans ce cas on écrit dx au lieu de Δx .

3. Approche :

- ❖ Approche n° 1 :
  - ➢ Un athlète parcours une distance de 5 km en 10 minutes . que représente la grandeur $30\ km/h$ pour l'athlète ?
  - ➢ 30 minutes était suffisante pour remplir un réservoir de volume $3\ m^3$ que représente la grandeur $100\ \ell/min$?

- Une voiture a parcouru une distance de 200 km pendant deux heures .
  que représente la grandeur $100\ km/h$.
- Une cartouche de chasse a parcourue une distance de 300 m une durée de 8.10^{-4} s .
  que représente la grandeur $375\ m/s$?

❖ Approche n° 2 :

- Après 10 minutes de départ d'une course la vitesse d'un athlète était $35\ km/h$.
  que représente la grandeur $35\ km/h$ pour l'athlète ?
- Après 20 s de lancement de remplir un réservoir le débit était $80\ \ell/min$.
- Le moment où la voiture heurte l'arbre la vitesse de la voiture était $120\ km/h$.
  que représente la grandeur $120\ km/h$ pour la voiture ?
- La vitesse initiale de départ d'une cartouche balle de chasse était $600\ m/s$
  que représente la grandeur $600\ m/s$ pour la balle de chasse ?
- Le moment où la balle heurte l'oie la vitesse de la balle était $300\ m\ \ s$.
  que représente la grandeur $300\ m/s$ pour la balle de chasse ?

II. Dérivabilité d'une fonction f au point $A\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$ (au point d'abscisse x_0 ou bien le point x_0) .

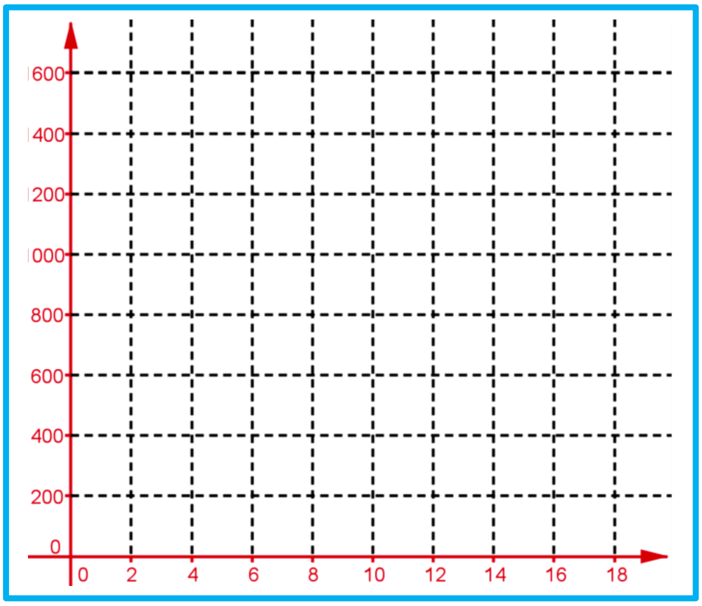
A. Dérivabilité d'une fonction f au point x_0

1. Activité :

La vitesse d'une voiture de course atteint pendant 10 secondes $360\ km/h$ on suppose que l'accélération est constante , ceci applique sur le conducteur une poussée horizontale égale son poids tel que son mouvement varie uniformément est déterminé par la fonction horaire $d_t = f(t) = 5t^2$ tel que t représente la durée en seconde , $d_t = f(t)$ représente la distance en mètre parcourue par la voiture après t seconde de départ .

Le but est de calculer la vitesse de la voiture après 3 secondes .

1. Quelle est la distance parcourue par la voiture après 10 seconde ?
2. Représenter graphiquement d_t en fonction de t .
3. Donner la formule qui donne $V_m[3,3+h]$ la vitesse moyenne entre l'instant 3 et $3+h$.
4. Calculer la vitesse moyenne pour h dans le tableau suivant (en m/s) .



h	1	0,1	0,01	0,001	0,0001
$V_m(3,3+h)$	....	....	....	....	....

5. D'après le tableau quelle est la valeur moyenne qui prend V_m quand h devienne très petit ? puis l'exprimer par des symboles .
6. Que représente ce grandeur en physique ?
7. En général on prend x_0 au lieu de 3 donner l'écriture de ce grandeur .
8. On pose : $x=3+h$ écrire la limite précédente en utilisant la variable h .

2. Vocabulaire et notation :

Le nombre $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}=\ell$ (ou encore $\lim\limits_{x\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=\ell$ est appelé la vitesse instantané de la voiture à l'instant $t=3$ ce nombre s'appelle le nombre dérivé au point $t=3$ et on note $\ell=f'(3)$ ou encore $\ell=\frac{df}{dx}(3)$.

On écrit $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}=f'(3)$ ou encore $\lim\limits_{x\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=f'(3)$

3. Cas général :

- On prend x_0 au lieu de 3 on obtient : $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=f'(x_0)$ avec $f'(x_0)$ est un nombre réel .
- On pose : $x=x_0+h$ on obtient : $x\to x_0$ au lieu de $h\to 0$ d'où :

$$\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)\ .$$

- Si la limite est finie on dit que la fonction est dérivable en x_0 .
- Donner la définition d'une fonction dérivable au point x_0 .

4. Définition :

f est une fonction définie sur un intervalle ouvert I contient x_0 (ou encore $]x_0-\alpha, x_0+\alpha[$) .

- f est dérivable au point $x_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\ell\in\mathbb{R}$. $\left(\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\ell\in\mathbb{R}\right)$ on note : $\ell=f'(x_0)$ s'appelle le nombre dérivé de f en x_0 . (ou encore)
- f est dérivable à droite de $x_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\ell_d\in\mathbb{R}$. $\left(\lim\limits_{h\to 0^+}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\ell_d\in\mathbb{R}\right)$

5. Remarque :

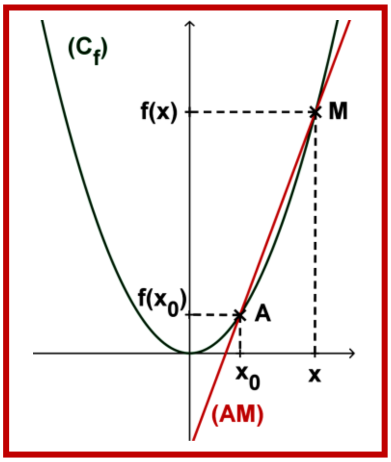
- $V(t_1)$ la vitesse instantanée à instant t_1 est

$V(t_1)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{d(t_1+h)-d(t_1)}{(t_1+h)-t_1}=f'(t_1)$ (à condition que la limite est finie) .

- Ou encore le nombre dérivé en t_1 de la fonction d (fonction f)

c.à.d $V(t_1)=d'(t_1)=f'(t_1)$

Exemple : On suppose que la distance parcourue par un solide en mouvement exprimée en fonction de t est $d(t)=f(t)=10t^2$ tel que d en km et t en h (heure) .



On calcule la vitesse instantanée du solide en $t_1 = 1h$, on a :

$$\lim_{h\to 0} V_m[t_1, t_1+h] = \lim_{h\to 0} V_m[1,1+h] = \lim_{h\to 0} \frac{d(1+h)-d(1)}{(1+h)-1} = \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{10(1+h)^2-10}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{10h^2+20h}{h} = \lim_{h\to 0} 10h+20 = 20$$

$$\lim_{h\to 0} V_m[t_1, t_1+h] = \lim_{h\to 0} V_m[1,1+h] = \lim_{h\to 0} \frac{d(1+h)-d(1)}{(1+h)-1} = \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{10(1+h)^2-10}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{10h^2+20h}{h} = \lim_{h\to 0} 10h+20 = 20$$

Conclusion : la vitesse instantanée à l'instant $t_1 = 1h$ est $V(t_1) = 20 \ {}^{km}/_{h}$.

B. Interprétation géométrique du nombre dérivé – tangente à une courbe d'une fonction a un point :

1. Activité :

- $A\begin{pmatrix} x_0 \\ f(x_0) \end{pmatrix}$ et $M\begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix}$ deux points de la courbe (C_f) .
- f est une fonction dérivable au point x_0 .

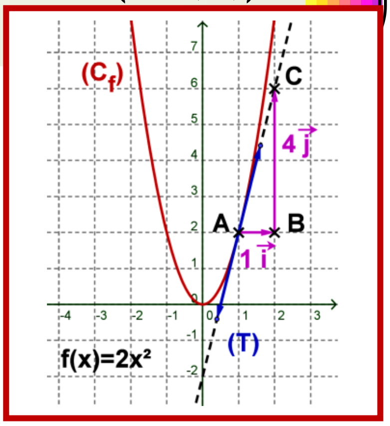
1. Donner le coefficient directeur et vecteur directeur de (AM) .
2. Quand x tend vers x_0 , quelle est la position de la droite (AM) ? déterminer le coefficient directeur de cette position que l'on note (T) .
3. Donner l'équation réduite de (T) puis on déduit l'équation cartésienne de (T) .

2. Propriété :

- f est une fonction dérivable au point x_0 .
- (C_f) sa courbe représentative dans un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.
  - ❖ Le nombre dérivé $f'(x_0)$ est le coefficient directeur de la droite tangente (T) à la courbe (C_f) de f au point $A(x_0, f(x_0))$ (le point x_0).
  - ❖ Equation cartésienne de la tangente (T) à la courbe (C_f) de f au point $A(x_0, f(x_0))$ est $(T): y = (x - x_0)f'(x_0) + f(x_0)$

3. Exemple :

1. Trouver équation de la tangente (T) à la courbe (C_f) de f au point $x_0 = 1$ avec $f(x) = 2x^2$.



L'équation est $(T): y = (x-1)f'(1) + f(1)$ ou $(T): y = (x-1)\times 4 + 2$.

D'où le coefficient directeur est $m = 4$ et vecteur directeur est : $\vec{u}(1,4) = 1\vec{i} + 4\vec{j}$

A partir du point $A(1, f(1))$ avec $f(1) = 2$

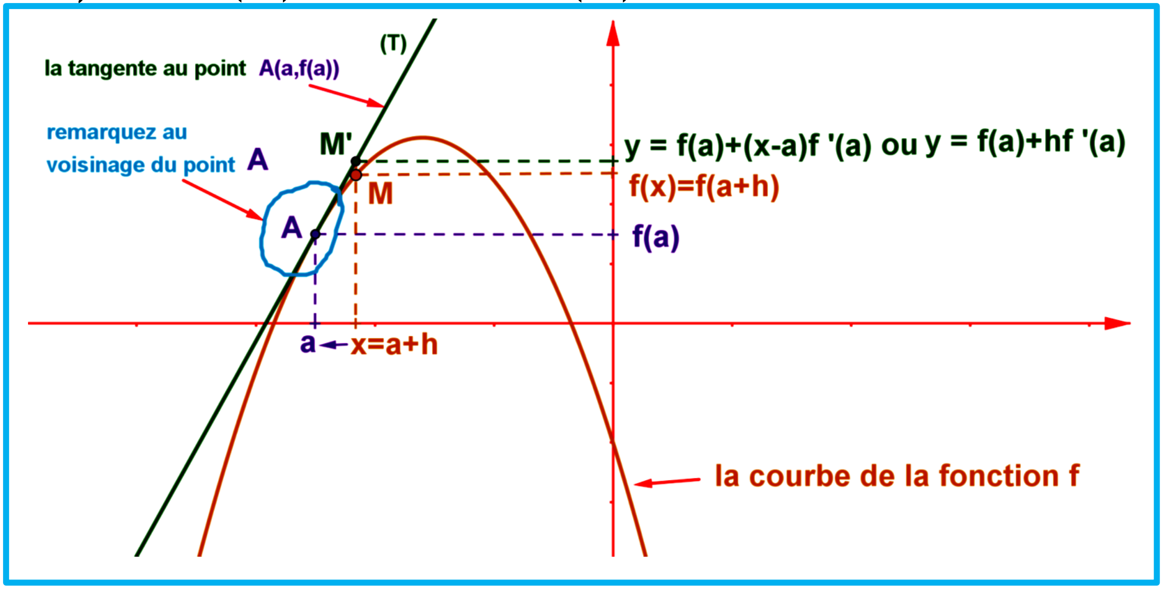
- On construit le point B tel que $\overrightarrow{AB} = 1\vec{i}$ et on construit le point C tel que $\overrightarrow{BC} = 4\vec{j}$.

- D'où la droite (AC) est la tangente (T) à (C_f) au point A.
- Pour tracer la tangente il suffit de tracer un segment dans les extrémités on met des flèches son milieu est A.

C. Approximation affine d'une fonction dérivable en un point .

1. Approximation affine d'une fonction f en un point a : c'est de trouver

une fonction affine $g(x)=mx+p$ qui sera a peu prêt-égale la fonction $f(x)$ au voisinage du point $A(a,f(a))$ ou encore $f(x)\approx mx+p$. On sait que au voisinage $A(a,f(a))$ la courbe (C_f) et la tangente (T) à (C_f) à ce point s'approche beaucoup .



- On considère le point $M(x,f(x))$ de (C_f) la courbe de f , puis le point $M'(x,y)$ de la tangente (T) de f au point a .

Remarque :

- Au point $A(a,f(a))$ la courbe de f et la tangente (T) de f au point a s'approche beaucoup

- Quant x tend vers a (c.à.d. on pose $x=a+h$ avec $h\to 0$) dans ce cas le point M tend vers M' ; donc les ordonnées de M et M' s'approche de la même valeur d'où : $f(a+h)\approx y$ ou encore $f(a+h)\approx f(a)+hf'(a)$

- Si on pose : $x=a+h$ on obtient $f(x)\approx(x-a)f'(a)+f(a)$.

2. Définition :

f est une fonction dérivable au point a .

- La fonction u tel que : $u:x\to f(a)+(x-a)f'(a)$ (ou encore $(x-a=h)$; $v:h\to f(a)+hf'(a)$) est appelée la fonction affine tangente à la fonction f au point a .
- Quand x est très proche de a le nombre $f(a)+(x-a)f'(a)$ est un e approximation affine de $f(x)$ au voisinage de a on écrit : $f(x)\approx f(a)+(x-a)f'(a)$.
- Ou encore le nombre $f(a)+hf'(a)$ est approximation affine de $f(a+h)$ au voisinage de zéro on écrit $f(a+h)\approx f(a)+hf'(a)$ avec $x-a=h$.

3. Exemple :

- **Exemple 1 :**

1. Trouver une approximation affine du nombre $f(1+h)$ avec $f(x)=x^2$ et $a=1$.

Correction :

f est une fonction dérivable au point 1 avec $f'(1)=2$ approximation affine de $f(1+h)$ est :

$f(1+h)\approx hf'(1)+f(1)\approx 2h+1$.

Conclusion : $f(1+h)=(1+h)^2\approx 2h+1$.

Application du résultat :

On prend $h=0,001$ d'où : $f(1,001)=f(1+0,001)\approx 2\times 0,001+1$ donc $f(1+0,001)\approx 1,002$.

On vérifie : $f(1,001)=(1,001)^2=1,002001$ donc $1,002\approx 1,002001$.

Technique de calcule : $(1+h)^2$ avec h très proche de zéro on calcule $2h+1$.

- **Exemple 2 :**

1. Trouver une approximation affine du nombre $\sqrt{9,002}$.

Correction :

On pose $f(x)=\sqrt{x}$ et $a=9$ et $h=0,002$ d'où $\sqrt{9,002}=f(9+0,002)$.

On calcule le nombre dérivé de f en 9 on a :

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(9+h)-f(9)}{h}=\lim_{x\to 9}\frac{f(x)-f(9)}{x-9}=\lim_{x\to 9}\frac{\sqrt{x}-3}{x-9}=\lim_{x\to 9}\frac{\cancel{\sqrt{x}-3}}{\cancel{(\sqrt{x}-3)}(\sqrt{x}+3)}=\lim_{x\to 9}\frac{\cancel{1}}{(\sqrt{x}+3)}=\frac{1}{6}\in\mathbb{R}$$

D'où : f est dérivable au point 9 et le nombre dérivée en 9 est $f'(9)=\frac{1}{6}$.

On trouve une approximation affine du nombre $\sqrt{9,002}$.

On a : $f(a+h)\approx f(a)+hf'(a)$ d'où $f(9+0,002)\approx f(9)+0,002\times f'(9)$.

Donc : $f(9+0,002)\approx\sqrt{9}+0,002\times\frac{1}{6}$ par suite $f(9+0,002)\approx 3,000333333$.

On remarque que $\sqrt{9,002}\approx 3,000333333$ la calculatrice donne : $\sqrt{9,002}\approx 3,000333315$ d'où la précision est 3×10^{-8} .

4. Remarque :

- Pour la fonction : $f(x)=x^2$ et $a=1$ on a : $f(1+h)=(1+h)^2\approx 1+2h$.
- Pour la fonction : $f(x)=x^3$ et $a=1$ on a : $f(1+h)=(1+h)^3\approx 1+3h$.
- Pour la fonction : $f(x)=\sqrt{x}$ et $a=1$ on a : $f(1+h)=\sqrt{1+h}\approx 1+\frac{h}{2}$.
- Pour la fonction : $f(x)=\frac{1}{x}$ et $a=1$ on a : $f(1+h)=\frac{1}{1+h}\approx 1-h$.

III. Dérivabilité à droite et à gauche :

A. Le nombre dérivée à droite – à gauche :

1. Activité :

f est une fonction définie par : $\begin{cases} f(x) = 2x+1 & ; x \geq 1 \\ f(x) = 3x^2 & ; x < 1 \end{cases}$.

1. Calculer : $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$; $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$.

2. Vocabulaire :

- On dit que f est dérivable à droite du point $a=1$ et le nombre dérivé à droite de 1 est $f'_d(1) = 2$.
- On dit que f est une f dérivable à gauche du point $a=1$ et le nombre dérivé à gauche de 1 est $f'_g(1) = 6$.
- f n'est pas dérivable au point $a=1$.

3. Définition :

f est une fonction définie sur $I_d = [x_0 ; x_0+\alpha[$ (à droite de x_0) .

- f est dérivable à droite de $x_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0^+} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \ell_d \in \mathbb{R}$. $\left(\lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \ell_d \in \mathbb{R} \right)$ $\ell_d = f'_d(x_0)$

s'appelle le nombre dérivé à gauche de f en x_0 .

f est une fonction définie sur $I_g =]x_0 - \alpha ; x_0]$ (à gauche de x_0) .

- f est dérivable à gauche de $x_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0^-} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \ell_g \in \mathbb{R}$. $\left(\lim\limits_{h \to 0^-} \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \ell_g \in \mathbb{R} \right)$ $\ell_g = f'_g(x_0)$

s'appelle le nombre dérivé à gauche de f en x_0 .

4. Propriété :

f est une fonction définie sur un intervalle ouvert I contient x_0 .

f est une fonction dérivable au point x_0 si et seulement si :

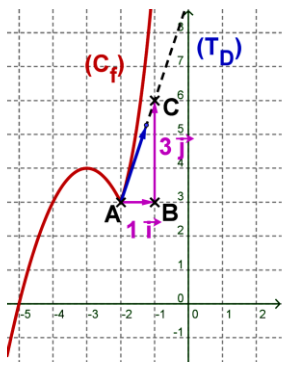
f est dérivable à droite de x_0 et f est dérivable à gauche de x_0 et $f_d'(x_0) = f_g'(x_0)$.

5. interprétation géométrique du nombre dérivé à droite et à gauche équation de deux demis tangentes :

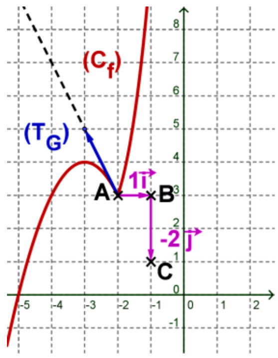
soit $\begin{cases} f(x) = (x+3)^3 + 2 & ; x \geq -2 \\ f(x) = -(x+3)^2 + 4 & ; x < -2 \end{cases}$ on a $f'_d(-2) = 3$ et $f'_g(-2) = -2$

- équation du demi tangente à droite de -2 est $(T_d) : y = (x-x_0) f_d'(x_0) + f(x_0)$ avec $x \geq x_0$.
- équation du demi tangente à gauche de -2 est $(T_g) : y = (x-x_0) f_g'(x_0) + f(x_0)$ avec $x \leq x_0$.

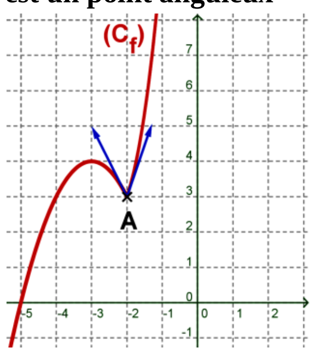
Demi tangente à droite de -2



Demi tangente à gauche de -2

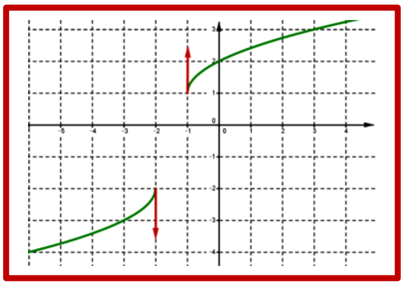


Demi tangente en -2 le point $A(-2,3)$ est un point anguleux



6. application :

$f(x)=|x-3|$ «étudier la dérivabilité de f au point $x_0=3$.



7. demi tangente parallèle à l'axe des ordonnées :

exemple $f(x)=\sqrt{(x+1)(x+2)}$.

- à droite de $x_0=1$ on a : $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=f(1)$ et $\lim\limits_{x\to1^+}=\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\infty$.

  donc (C_f) admet demi tangente verticale (parallèle à l'axe des ordonnées) à droite du point $M(1,f(1))$

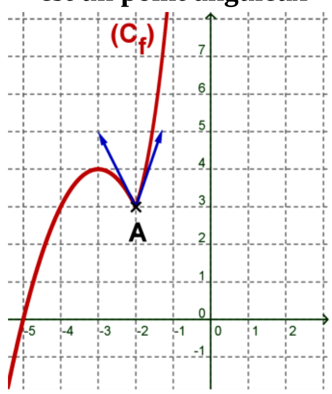
- à gauche de $x_0=-1$ on a : $\lim\limits_{x\to(-1)^-} f(x)=f(-1)$ et $\lim\limits_{x\to(-1)^+}=\dfrac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}=\infty$. donc (C_f) admet demi tangente verticale (parallèle à l'axe des ordonnées) à gauche du point $M(-1,f(-1))$.

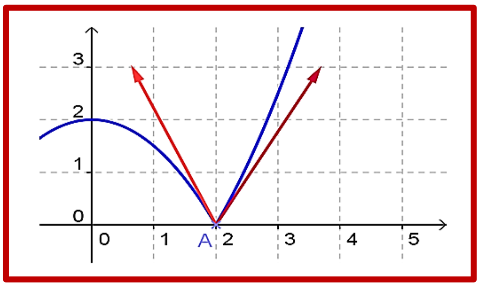
8. points anguleux :

le cas où les demis tangentes de même point $A(x_0,f(x_0))$ n'ont pas même support (n'ont pas même coefficient directeur) , le point $A(x_0,f(x_0))$ est appelé point anguleux .

- Exemple 1 :le point $A(-2,3)$ est un point anguleux .
- Exemple 2 : le point $A(2,0)$ est un point anguleux .

Demi tangente en -2 . le point $A(-2,3)$ est un point anguleux





IV. Dérivabilité sur un intervalle :

1. Un intervalle de la forme $]a,b[$ ou de la forme $[a,b[$.

Définition :

- f est une fonction dérivable sur $I=]a;b[$ si et seulement si f est d dérivable en tout point x_0 de I .
- f est une fonction dérivable sur $[a;b[$ si et seulement si f est d dérivable sur $I=]a;b[$ et f est dérivable à droite du point a .

V. La fonction dérivée d'une fonction :

1. Définition :

f est une fonction dérivable sur un intervalle I .
La fonction g qui relie chaque élément x de I par le nombre $f'(x)$ s'appelle la fonction dérivée de f et on note : $g=f'$.

Ou encore $\begin{aligned} g :& I\to\mathbb{R} \\ & x\to g(x)=f'(x)\end{aligned}$ g s'appelle la fonction dérivée de f on note : $g=f'$.

2. Activité :

Déterminer f' la fonction dérivée de f sur $D_f=\mathbb{R}$ tel que $f(x)=c\ ;(c\in\mathbb{R})$

3. Propriété :

f est une fonction dérivable sur un intervalle I et f' sa fonction dérivée sur I .

- La fonction constante $f(x)=c\ ;(c\in\mathbb{R})$ est dérivable sur $I=\mathbb{R}$ sa fonction dérivée sur $I=\mathbb{R}$ est $f'(x)=(c)'=0$.
- La fonction identique $f(x)=x$ est dérivable sur $I=\mathbb{R}$ sa fonction dérivée sur $I=\mathbb{R}$ est $f'(x)=(x)'=1$.
- La fonction constante $f'(x)=(x^2)'=2x$ est dérivable sur $I=\mathbb{R}$ sa fonction dérivée sur $I=\mathbb{R}$ est $f'(x)=(x^2)'=2x$.
- La fonction $f(x)=x^3$ est dérivable sur $I=\mathbb{R}$ sa fonction dérivée sur $I=\mathbb{R}$ est $f'(x)=(x^3)'=3x^2$.
- La fonction $f(x)=x^n\ (n\in\mathbb{N}^*)$ est dérivable sur $I=\mathbb{R}$ sa fonction dérivée sur $I=\mathbb{R}$ est $f'(x)=(x^n)'=nx^{n-1}$
- La fonction $f(x)=\dfrac{1}{x}$ est dérivable sur $I=\mathbb{R}\setminus\{0\}$ sa fonction dérivée sur $I=\mathbb{R}\setminus\{0\}$ est $f'(x)=\left(\dfrac{1}{x}\right)'=-\dfrac{1}{x^2}$
- La fonction $f(x)=\sqrt{x}$ est dérivable sur $I=]0,+\infty[$ sa fonction dérivée sur $I=]0,+\infty[$ est $f'(x)=(\sqrt{x})'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

VI. La fonction dérivée seconde – dérivée $n^{\text{ième}}$ d' une fonction f .

1. Activité :

1. Donner f' la fonction dérivée de $f(x)=x$ sur $\mathbb{R}$.
2. Est-ce que f' est dérivable sur $\mathbb{R}$?

2. Vocabulaire :

- La dérivée de f' s'appelle la fonction dérivée deuxième de f (dérivée seconde de f) . on note $(f'(x))'=f''(x)=f^{(2)}(x)$.
- Si la fonction $f^{(2)}$ est aussi dérivable sur I sa fonction dérivée $\left(f^{(2)}\right)'(x)$ s'appelle la fonction dérivée troisième de f (ou encore la dérivée d'ordre 3) et on note $\left(f^{(2)}\right)'=f^{(3)}$.
- En général : la dérivée d'ordre n de f est la fonction dérivée de $f^{(n-1)}(x)$ (la dérivée de la fonction dérivée d'ordre $n-1$) et on note $f^{(n)}(x)=\left(f^{(n-1)}\right)'(x)$.

3. Application :

1. Calculer $f^{(3)}(x)$ pour $f(x)=x^5$ puis pour $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$.

VII. Les opérations sur les fonctions dérivables :

1. Activité :

Soient f et g deux fonctions dérivables en x_0 .

1. Est-ce que la fonction $f+g$ est dérivable en x_0 ?

2. On suppose que la fonction $f\times g$ est dérivable sur un intervalle I et sa fonction dérivée vérifie $(fg)'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$. on déduit que les fonctions suivantes αf et $f^2=f\times f$ et $f^3=f\times f\times f$ et ...f^n sont dérivables sur I et déterminer leurs fonctions dérivées .
3. On suppose que la fonction g ne s'annule pas sur I $(\forall x\in I, g(x)\neq 0)$, f et g sont dérivables sur I . montrer que les fonctions $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont dérivables sur I , puis déterminer leurs fonctions dérivées .

2. Propriété :

Soient f et g deux fonctions dérivables sur I . on a :

- La fonction $f+g$ est dérivable sur I et $(f+g)'(x)=f'(x)+g'(x)$.
- La fonction αf est dérivable sur I et $(\alpha f)'(x)=\alpha f'(x)$ avec $\alpha\in\mathbb{R}$
- La fonction $f\times g$ est dérivable sur I et $(f\times g)'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$.
- La fonction $\frac{1}{g}$ est dérivable sur I $\forall x\in I, g(x)\neq 0$ et $\left(\frac{1}{g}\right)'(x)=-\frac{g'(x)}{g^2(x)}$.
- La fonction $\frac{f}{g}$ est dérivable sur I $\forall x\in I, g(x)\neq 0$ et $\left(\frac{f}{g}\right)'(x)=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$.

3. Application :

Calculer f' pour les fonctions suivantes :

1) $f(x)=7$; 2) $f(x)=x$; 3) $f(x)=5x$; 4) $f(x)=5x+7$; 5) $f(x)=3x^2+5x+7$.

VIII. Dérivabilité des fonctions : polynomiales – rationnelles - $g(x)=\sqrt{f(x)}$ et $f^n(x)$ et $f(ax+b)$.

A. Dérivabilité des fonctions : polynomiales – rationnelles :

1. Propriété :

- Toute fonction polynomiale est dérivable sur son ensemble de définition $D_f=\mathbb{R}$ et $(ax^n)'=nax^{n-1}$ et $n\in\mathbb{N}^*$.
- Toute fonction rationnelle est dérivable sur son ensemble de définition D_f .

B. Dérivabilité de la fonction $f^n(x)$:

1. Propriété :

f est une fonction dérivable sur un intervalle I .

- La fonction f^n avec $n\in\mathbb{N}^*$ est dérivable sur I et on a : $(f^n)'(x)=nf^{n-1}(x)f'(x)$.
- Si pour tout x de I ; $f(x)\neq 0$ on a la fonction $f^p(x)$ avec $p\in\mathbb{Z}^*$ est dérivable sur I et $(f^p)'(x)=pf^{p-1}(x)f'(x)$.

2. Exemple :

Calculer : $g'(x)$ pour $g(x)=\left(-2x^4+5x^2+x-3\right)^7$.

Correction : $g'(x)=\left[(-2x^4+x-3)^7\right]'=7\left(-2x^4+x-3\right)^6\left(-2x^4+x-3\right)'=7\left(-2x^4+x-3\right)^6\left(-8x^3+1\right)$.

C. Dérivabilité de la fonction de la forme $f(ax+b)$:

1. Propriété :

f est une fonction dérivable sur un intervalle I , a et b de $\mathbb{R}$. J est l'ensemble des réels x tel que $ax+b\in I$. la fonction $g: x\mapsto g(x)=f(ax+b)$ est dérivable sur J avec :
$\forall x\in J\ ;\ g'(x)=[f(ax+b)]'=af'(ax+b)$.

2. Application :

On suppose que : $(\sin(x))'=\cos(x)$ calcule $g(x)=\sin(5x+3)$.

D. Dérivabilité des fonctions de la forme $\sqrt{f(x)}$.

1. Propriété :

f est une fonction strictement positive et dérivable sur un intervalle I .
La fonction $g(x)=\sqrt{f(x)}$ est dérivable sur un intervalle I avec $\forall x\in I: \left(\sqrt{f(x)}\right)'=\dfrac{f'(x)}{2\times\sqrt{f(x)}}$.

2. Exemple : $g(x)=\sqrt{x^6+5x^2+1}$ on calcule $g'(x)$.

On a : $\left(g(x)\right)'=\left(\sqrt{x^6+5x^2+1}\right)'=\dfrac{\left(x^6+5x^2+1\right)'}{2\times\sqrt{x^6+5x^2+1}}=\dfrac{(6x^5+10x)}{2\times\sqrt{x^6+5x^2+1}}$

IX. Dérivabilité des fonctions trigonométriques :

1. Activité : On considère la fonction $f(x)=\cos(x)$ et $g(x)=\sin(x)$

1. Montrer que les fonctions f et g sont dérivable en $x_0\in\mathbb{R}$.
2. Montrer que la fonction $g(x)=\tan(x)$ est dérivable en x_0 tel que $x\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi$; $k\in\mathbb{Z}$.

2. Propriété :

- La fonction $f(x)=\cos(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $f'(x)=(\cos(x))'=-\sin(x)$.
- La fonction $f(x)=\sin(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $f'(x)=(\sin(x))'=\cos(x)$
- La fonction $f(x)=\tan(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi\ ;\ k\in\mathbb{Z}\right\}$ avec $f'(x)=(\tan(x))'=1+\tan^2(x)$

ou encore $f'(x)=(\tan(x))'=\dfrac{1}{\cos^2 x}$

3. Conséquence :

- $\left(\cos(ax+b)\right)'=-a\sin(ax+b)$. $\left(\sin(ax+b)\right)'=a\cos(ax+b)$. $\left(\tan(ax+b)\right)'=a\left(1+\tan^2(ax+b)\right)$.

4. Exemple :

$f(x)=3\sin(9x+3)-4\cos^3(8x-1)+3\tan^6(7x+3)$ on calcule $f'(x)$. On a :

$$\begin{aligned}(f(x))'&=\left(3\sin(9x+3)-4\cos^3(8x-1)+3\tan^6(7x+3)\right)'\\&=3\times9\cos(9x+3)-4\times3\left(\cos(8x-1)\right)'\cos^2(8x-1)+3\times6\left(\tan(7x+3)\right)'\tan^5(7x+3)\\&=27\cos(9x+3)-12\times8\sin(8x-1)\cos^2(8x-1)+18\times7\left(1+\tan^2(7x+3)\right)\tan^5(7x+3)\end{aligned}$$

Conclusion : $f'(x)=27\cos(9x+3)-96\sin(8x-1)\cos^2(8x-1)+126\left(1+\tan^2(7x+3)\right)\tan^5(7x+3)$

X. Tableau des fonctions dérivées des fonctions usuelles :

La fonction f	D_f Domaine de définition de f	La fonction dérivée f '	$D_{f'}$ Domaine de définition de f '
$f(x)=a$	$D_f=\mathbb{R}$	$f'(x)=0$	$D_{f'}=\mathbb{R}$
$f(x)=x$	$D_f=\mathbb{R}$	$f'(x)=1$	$D_{f'}=\mathbb{R}$
$f(x)=x^n$ ؛ $n\in\mathbb{N}^*\setminus\{1\}$	$D_f=\mathbb{R}$	$f'(x)=nx^{n-1}$	$D_{f'}=\mathbb{R}$
$n\in\mathbb{Z}^*\setminus\{1\}$ ؛ $f(x)=x^n$	$D_f=\mathbb{R}$	$f'(x)=nx^{n-1}$	$D_{f'}=\mathbb{R}^*$
$f(x)=\sqrt{x}$	$D_f=[0,+\infty[$	$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$D_{f'}=]0,+\infty[$
$f(x)=\frac{1}{x}$	$D_f=\mathbb{R}^*$	$f'(x)=-\frac{1}{x^2}$	$D_{f'}=\mathbb{R}^*$
$f(x)=\sin x$	$D_f=\mathbb{R}$	$f'(x)=\cos x$	$D_{f'}=\mathbb{R}$
$f(x)=\cos x$	$D_f=\mathbb{R}$	$f'(x)=-\sin x$	$D_{f'}=\mathbb{R}$
$f(x)=\tan x$	$x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi;k\in\mathbb{Z}$	$f'(x)=1+\tan^2 x$	$x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$
$f(x)=\sqrt{g(x)}$	$x\in D_g\,/\,g(x)\geq 0$	$f'(x)=\frac{g'(x)}{2\times\sqrt{g(x)}}$	$x\in D_{g'}\,/\,g(x)>0$
$f(x)=a$	$D_f=\mathbb{R}$	$f'(x)=0$	$D_{f'}=\mathbb{R}$
$f(x)=x$	$D_f=\mathbb{R}$	$f'(x)=1$	$D_{f'}=\mathbb{R}$
$f(x)=x^n$ ؛ $n\in\mathbb{N}^*\setminus\{1\}$	$D_f=\mathbb{R}$	$f'(x)=nx^{n-1}$	$D_{f'}=\mathbb{R}$
$n\in\mathbb{Z}^*\setminus\{1\}$ ؛ $f(x)=x^n$	$D_f=\mathbb{R}$	$f'(x)=nx^{n-1}$	$D_{f'}=\mathbb{R}^*$

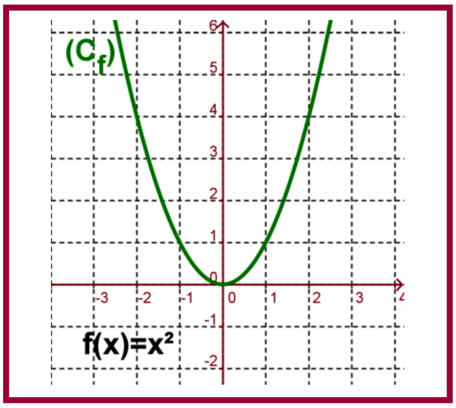
XI. Operations sur les fonctions dérivées :

Addition	$(f+g)'=f'+g'$	L'inverse	$\left(\frac{1}{g}\right)'=-\frac{g'}{g^2}$
multiplication	$(\alpha f)'=\alpha f'$ $(fg)'=f'g+fg'$	quotient	$\left(\frac{f}{g}\right)'=\frac{f'g-fg'}{g^2}$
Puissance	$(f^n)'=n\times f'\times f^{n-1}$ $(f(ax+b))'=af'(ax+b)$	Racine carrée	$(\sqrt{f})'=\frac{f'}{2\sqrt{f}}$

XII. Applications de la fonction dérivée première :

Remarque :

- dans le reste de ce chapitre f est une fonction numérique de la variable réelle x.
- (C_f) est sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.



A. La monotonie d'une fonction et le signe de sa fonction dérivée .

1. Activité :

La figure ci-contre représente la courbe de la fonction : $f(x)=x^2$.

1. Déterminer une relation entre la monotonie et la fonction dérivée f' sur l'intervalle $[0,+\infty[$.
2. Déterminer une relation entre la monotonie et la fonction dérivée f' sur l'intervalle $]-\infty,0]$.

2. Propriété :

f est une fonction dérivée sur un intervalle I.

- Si f est croissante sur I alors $\forall x\in I : f'(x)\geq 0$.
- Si f est décroissante sur I alors $\forall x\in I : f'(x)\leq 0$.
- Si f est constante sur I alors $\forall x\in I : f'(x)=0$.

3. Démonstration :

1er cas :

f est une fonction dérivée sur un intervalle I et f est croissante sur I.

Soit x_0 de I ; on considère la fonction g définie par : $g(x)=\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$; $x\in I\setminus\{x_0\}$.

Puis que f est croissante sur I donc : $g(x)=\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\geq 0$.

Puis que f est dérivable sur I et $x_0\in I$ donc f est dérivable en x_0 donc $g(x)$ admet une limite finie en x_0 d'où : $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)\geq 0$ (propriété ordre et les limites).

Puis que ceci est vrai pour tout x_0 de I donc $\forall x_0\in I : f'(x_0)\geq 0$.

Conclusion : $\forall x\in I : f'(x)\geq 0$

2ième cas :

f est une fonction dérivée sur un intervalle I et f est décroissante sur I.

Démonstration analogue

4. Propriété :

f est une fonction dérivée sur un intervalle I.

- Si la fonction dérivée f' est strictement positive sur I (f' s'annule en un points fini de I ceci ne change pas la monotonie de f) alors la fonction f est strictement croissante sur I.
- Si la fonction dérivée f' est strictement négative sur I (f' s'annule en un points fini de I ceci ne change pas la monotonie de f) alors la fonction f est strictement décroissante sur I.
- Si la fonction f' est nulle sur I (sur I tout entier) alors f est constante.

5. Exemple :

Etudier les variations de f sur $\mathbb{R}$ avec $f(x)=(2x+4)^2$.

- On calcule : f' .

$f'(x)=\left[(2x+4)^2\right]'$

$=2(2x+4)'(2x+4)=2\times 2(2x+4)=8x+16$

- Signe de f' :

On a $f'(x)\geq 0 \Leftrightarrow 8x+16\geq 0$

$\Leftrightarrow x\geq -2$

Donc : f' est positive sur $[-2,+\infty[$ et négative sur $]-\infty,-2]$.

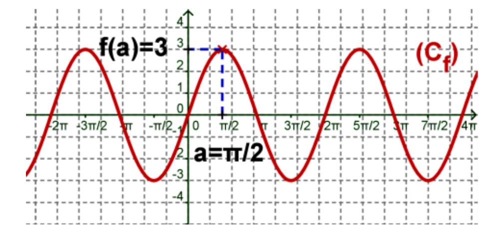
- Tableau de variation de f

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	$f(-2)=0$	$\nearrow$	$+\infty$

B. Extremums d'une fonction dérivable :

1. Activité :

La figure suivant représente une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et a est un élément de I



1. Est-ce que f admet un extremum en a ?
2. Donner la valeur de $f'(a)$.

2. Propriété :

f est une fonction dérivée sur un intervalle ouvert I , a est un élément de I .
Si f est dérivable au point a et admet un extremum au point a alors $f'(a)=0$.

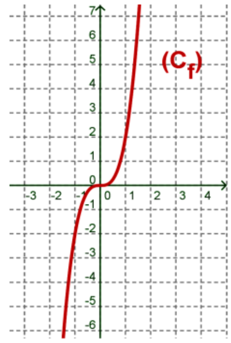
3. Remarque :

Si $f'(a)=0$ ne signifie pas que $f(a)$ est un extremum de la fonction f .

4. Exemple :

$f(x)=2x^3$ on a $f'(x)=6x^2$ d'où $f'(0)=0$ mais $f(0)$ n' est pas un extremum de la fonction f .

La fonction $f(x)=2x^3$



5. Propriété :

f est une fonction dérivée sur un intervalle ouvert I , a est un élément de I .
Si f' s'annule au point a et f' change de signe au voisinage de a alors $f(a)$ est un extremum de la fonction f

XIII. Equation différentielle de la forme : $y''+\omega^2 y=0$.

1. Introduction :

Pour les équations différentielles :

- f est une fonction ; on la note par y .
- f' est sa dérivée ; on la note par y' .
- L'écriture $f'(x)=af(x)+b$ on la note par $y'=ay+b$ on l'appelle équation différentielle linéaire de première degré de coefficients constant a et b .
- Toute fonction g dérivable qui vérifie cette équation différentielle ($g'(x)=ag(x)+b$) on l'appelle solution particulière de l' équation différentielle .

- Résoudre une équation différentielle c'est de trouver toutes les fonctions qui vérifie l'équation différentielle (c'est-à-dire de trouver la solution générale) .
- Le programme se limite aux équations différentielles de la forme : $y''+\omega^2 y=0$ avec ω de $\mathbb{R}$

2. Définition :

Soit ω de $\mathbb{R}$, y est une fonction et y'' sa fonction dérivée deuxième (ou seconde) .

L'équation $y''+\omega^2 y=0$ dont l'inconnue y s'appelle équation différentielle d'ordre 2 sans seconde membre .

Toute fonction f dérivable deux fois sur $\mathbb{R}$ et vérifie : $\forall x\in\mathbb{R}\ : f''(x)+\omega^2 f(x)=0$ s'appelle solution de l'équation différentielle $y''+\omega^2 y=0$.

3. Exemple :

$y''+9y=0$ c'est une équation différentielle .

4. Propriété :

la solution générale de l' équation différentielle $y''+\omega^2 y=0$ est l'ensemble des fonctions définie par : $y : x\mapsto \alpha\cos\omega x+\beta\sin\omega x$ avec α et β de $\mathbb{R}$.

5. Remarque :

Résoudre l'équation différentielle $y''+\omega^2 y=0$ signifie de déterminer la solution générale de cet équation .

6. Exemple :

Résoudre l'équation différentielle $y''+9y=0$.

On a $\omega=3$ ou $\omega=-3$ d'où la solution générale de cet équation est l'ensemble des fonctions de la forme : $y(x)=\alpha\cos 3x+\beta\sin 3x$ avec α et β de $\mathbb{R}$.

7. Cas particulier :

- $y''=0$ donc $y'=c$ (fonction constante) d'où y est de la forme $y(x)=cx+b$ avec c et b de $\mathbb{R}$.

8. Exemple :

Résoudre l'équation différentielle : $(E)\ : y''+16y=0$ avec $f(0)=1$ et $f\left(\frac{\pi}{8}\right)=1$.

La solution générale de l'équation différentielle (E) est de la forme $y(x)=\alpha\cos 4x+\beta\sin 4x$.

On a :

$$\left.\begin{array}{l} f(0)=1 \\ f\left(\frac{\pi}{8}\right)=1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha\cos(4\times 0)+\beta\sin(4\times 0)=1 \\ \alpha\cos\left(4\times\frac{\pi}{8}\right)+\beta\sin\left(4\times\frac{\pi}{8}\right)=1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=1 \\ \beta=1 \end{cases}$$

Conclusion : La solution de l'équation différentielle (E) qui vérifie les conditions initiales $f(0)=1$ et $f\left(\frac{\pi}{8}\right)=1$ est la fonction $f(x)=y(x)=\cos 4x+\sin 4x$.

XIV. Optimisation :

1. Approche :

Approche 1 :

Optimiser : du latin optimum qui signifie le meilleur :

- **Qui nous permet de donner les meilleurs choix ou les meilleurs résultat possibles en utilisant un travail convenables d'une situation donnée .**
- **En mathématique : Optimiser une situation**

Demande une analyse pour intégrer cette situation sous forme une fonction puis déterminer les extremums qui donne les meilleurs choix pour répondre à la question posée .

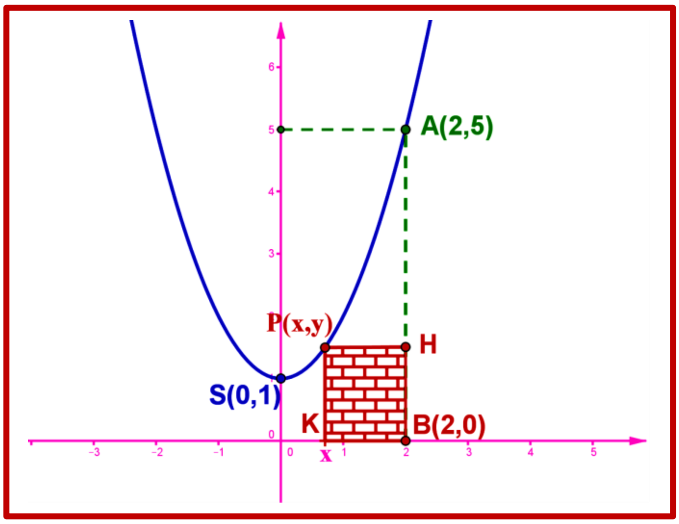
Approche 2 :

Plusieurs problèmes de la vie courante nous pousse à déterminer les valeurs maximales ou les valeurs minimales liées a une quantité variables ; tel que ces valeurs présentent les meilleurs de la situation posée ou le problème posé on appelle ces valeurs « valeurs Optimales » .

Déterminer ces valeurs présente un exercice ou problème « optimisation » .

2. Exemple :

La figure ci-contre représente un parabole de sommet $S(0,1)$ et passe par le point $A(2,5)$ puis on considère le point $B(2,0)$.



1. **Déterminer $f(x)$ l'équation du parabole .**
2. **$P(x,y)$ est un point du parabole tel que $0 \leq x < 2$.**

- **On considère le point H la projection orthogonale du point P sur la droite (AB) .**
- **On considère le point K la projection orthogonale du point P sur l'axe des abscisse .**
  - a. **Déterminer la surface du rectangle $PHBK$ en fonction de x .**
  - b. **Déterminer l'abscisse du point $P(x,y)$ du parabole tel que la surface du rectangle $PHBK$ est maximale .**
  - c. **Déterminer la surface maximale du rectangle $PHBK$.**