I. Introduction générale:

Les fonctions usuelles sont des fonctions simples et typiques dont les propriétés géométriques dépendent de leur formes et des leurs paramètres . Dans ce cours nous allons voir quelques unes de ces fonctions , nous citons les fonctions affines , les fonctions polynômes de second degré , les fonctions homographiques, quelques fonctions irrationnellles simples et les fonctions trigonométriques de base.

Pour chacune de ces fonctions f ; on pose : $T_f = \dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}$ tels que x et y deux élèments différents du domaine de définition D_f de f .

On désigne par (C_f) la coure de la fonction f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

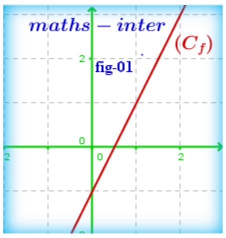
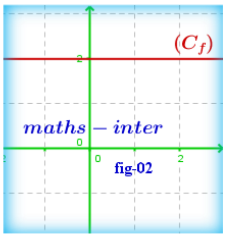
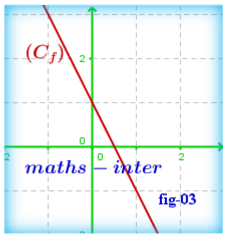
II. La fonction Affine : Cette fonction s'écrit : $f(x) = ax + b$

f étant une fonction polynôme donc son domaine définition est $D_f = IR$.

Le taux d'accroissement est :

$$T_f = \frac{f(x)-f(y)}{x-y} = \frac{(ax+b)-(ay+b)}{x-y} = \frac{ax+b-ay-b}{x-y} = \frac{a(x-y)}{x-y} = a$$

Les variations de f dépendent de a , coefficient de la fonction de f , d'où le résumé suivant :

	$a > 0$	$a = 0$	$a < 0$
Tableau de Variations De La fonction f	$T_f > 0$ f croissante sur IR x: $-\infty$ … $+\infty$ $f(x)$: ↗	$T_f = 0$ f constante sur IR x: $-\infty$ … $+\infty$ $f(x)$: →	$T_f > 0$ f décroissante sur IR x: $-\infty$ … $+\infty$ $f(x)$: ↘
Exemple De Représentation graphique	$f(x) = 2x - 1$ $f(0) = -1$ et $f(1) = 1$ 	$f(x) = 0x + 2$ $f(0) = 2$ et $f(1) = 2$ 	$f(x) = -2x + 1$ $f(0) = 1$ et $f(1) = -1$ 

III. Fonction polynôme de second degré :la fonction s'écrit : $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$

f étant une fonction polynôme donc son domaine définition est $D_f = IR$.

Le taux d'accroissement est :

$$T_f = \frac{f(x)-f(y)}{x-y} = \frac{(ax^2+bx+c)-(ay^2+by+c)}{x-y} = \frac{a(x^2-y^2)+b(x-y)}{x-y} = a(x+y)+b$$

d'où $: T_f = a(x+y)+b = a(x+y+\dfrac{b}{a}) = a\left((x+\dfrac{b}{2a})+(y+\dfrac{b}{2a})\right)$

On en déduit que l'expression $\left((x+\dfrac{b}{2a})+(y+\dfrac{b}{2a})\right)$ est négative sur $\left]-\infty ; -\dfrac{b}{2a}\right[$ et positive sur $\left]-\dfrac{b}{2a} ; +\infty\right[$

Les variations de f dépendent de a , d'où le résumé suivant :

	a > 0	**a < 0**
Tableau de Variations De La fonction f	$T_f < 0$ sur $\left]-\frac{b}{2a};+\infty\right[$ $T_f > 0$ sur $\left]-\frac{b}{2a};+\infty\right[$ D'où le tableau de variations de f sur IR	$T_f < 0$ sur $\left]-\frac{b}{2a};+\infty\right[$ $T_f > 0$ sur $\left]-\frac{b}{2a};+\infty\right[$ D'où le tableau de variations de f sur IR

a > 0 :

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
f(x)	$\searrow$	$f(-\frac{b}{2a})$	$\nearrow$

(C_f) est une parabole de sommet $\Omega\left(-\frac{b}{2a};f(-\frac{b}{2a})\right)$ et orientée vers le haut

a < 0 :

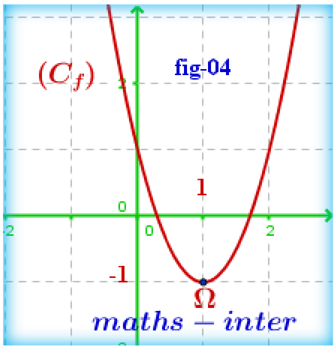
x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
f(x)	$\nearrow$	$f(-\frac{b}{2a})$	$\searrow$

(C_f) est une parabole de sommet $\Omega\left(-\frac{b}{2a};f(-\frac{b}{2a})\right)$ et orientée vers le bas

Exemple De Représentation graphique

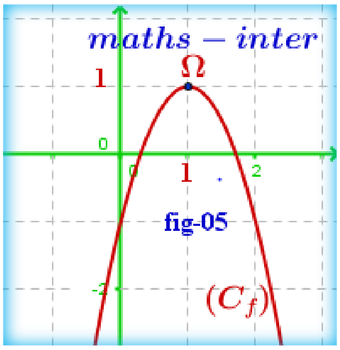
a > 0 : $f(x)=2x^2-4x+1$

$f(1)=-1$ et $f(0)=1$ et $f(-1)=7$



a < 0 : $f(x)=-2x^2+4x-1$

$f(1)=-1$ et $f(0)=1$ et $f(-1)=7$



IV. Fonction homographique :

la fonction s'écrit : $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ avec $\Delta=ad-bc\neq 0$

On a $D_f=IR-\left\{-\frac{d}{c}\right\}=\left]-\infty;-\frac{d}{c}\right[\cup\left]-\frac{d}{c};+\infty\right[$

Le taux d'accroissement est : $T_f=\frac{f(x)-f(y)}{x-y}=\frac{\frac{ax+b}{cx+d}-\frac{ay+b}{cy+d}}{x-y}$

Après simplifiactions de calcul, on trouve : $T_f=\frac{ad-bc}{(cx+d)(cy+d)}=\frac{\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}}{(cx+d)(cy+d)}=\frac{\Delta}{(cx+d)(cy+d)}$

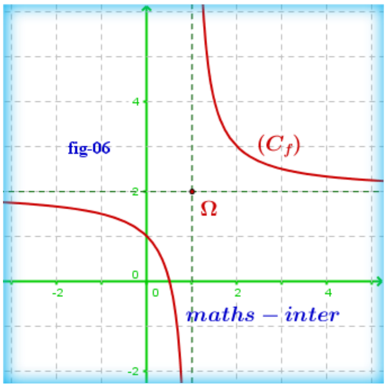
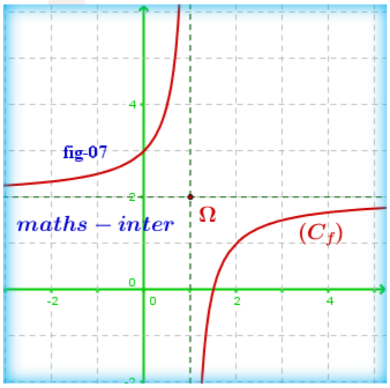
L'expression $(cx+d)(cy+d)$ **est positive sur chacun des intervalles** $\left]-\infty;-\frac{d}{c}\right[$ **et** $\left]-\frac{d}{c};+\infty\right[$

D'où les variations de f dépendent de $\Delta=\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}=ad-bc$

Donc si $\Delta>0$ **, alors** f **est croissante sur chacun des intervalles** $\left]-\infty;-\frac{d}{c}\right[$ **et** $\left]-\frac{d}{c};+\infty\right[$

et si $\Delta<0$ **, alors** f **est décroissante sur chacun des intervalles** $\left]-\infty;-\frac{d}{c}\right[$ **et** $\left]-\frac{d}{c};+\infty\right[$

d'où le résumé :

<table>
<tr><td></td><td>$\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc > 0$</td><td>$\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc < 0$</td></tr>
<tr><td>Tableau de Variations De La fonction f</td>
<td>$T_f > 0$ sur les deux intervalles:
$\left]-\infty ; -\frac{d}{c}\right[$ et $\left]-\frac{d}{c} ; +\infty\right[$
D'où le tableau de variations de f sur IR
$\begin{array}{c|ccccc} x & -\infty & & -\frac{d}{c} & & +\infty \\ \hline f(x) & & \nearrow & \| & \nearrow & \end{array}$</td>
<td>$T_f < 0$ sur les deux intervalles:
$\left]-\infty ; -\frac{d}{c}\right[$ et $\left]-\frac{d}{c} ; +\infty\right[$
D'où le tableau de variations de f sur IR
$\begin{array}{c|ccccc} x & -\infty & & -\frac{d}{c} & & +\infty \\ \hline f(x) & & \searrow & \| & \searrow & \end{array}$</td></tr>
<tr><td>Exemple De Représentation graphique</td>
<td>(C_f) est un e hyperbole de centre $\Omega\left(-\frac{d}{c} ; \frac{a}{c}\right)$
Et d'asymptôtes: $(\Delta_1) : x = \frac{a}{c}$ et $(\Delta_2) : y = -\frac{d}{c}$
$f(x) = \frac{2x-1}{x-1}$
$f(3) = 5/2$ et $f(2) = 3$ et $f(0) = 1$ et $f(-1) = 3/2$
</td>
<td>(C_f) est un e hyperbole de centre $\Omega\left(-\frac{d}{c} ; \frac{a}{c}\right)$
Et d'asymptôtes: $(\Delta_1) : x = \frac{a}{c}$ et $(\Delta_2) : y = -\frac{d}{c}$
$f(x) = \frac{2x-3}{x-1}$
$f(3) = 3/2$ et $f(2) = 1$ et $f(0) = 3$ et $f(-1) = 5/2$
</td></tr>
</table>

V. La fonction polynôme de 3ème degré ax^3 : f s'écrit : $f(x) = ax^3$ a $a \neq 0$

f étant une fonction polynôme donc son domaine définition est $D_f = IR$.
Le taux d'accroissement est :

$$T_f = \frac{f(x)-f(y)}{x-y} = \frac{ax^3 - ay^3}{x-y} = \frac{a(x^3-y^3)}{x-y} = \frac{a(x-y)(x^2+xy+y^2)}{x-y}$$

d'où : $T_f = a(x^2 + xy + y^2)$

On en déduit que l'expression $x^2 + xy + y^2$ est positive sur chacun des intervalles $]-\infty ; 0[$ et $]0 ; +\infty[$
Les variations de f dépendent de a , d'où le résumé suivant :

<table>
<tr><td></td><td>$a > 0$</td><td>$a < 0$</td></tr>
<tr><td>Tableau de Variations De</td>
<td>$T_f > 0$ sur IR
D'où le tableau de variations de f sur IR
$\begin{array}{c|ccc} x & -\infty & 0 & +\infty \end{array}$</td>
<td>$T_f > 0$ sur IR
ومنه جدول تغيرات الدالة f على IR
$\begin{array}{c|ccc} x & -\infty & 0 & +\infty \end{array}$</td></tr>
</table>

La fonction f

$f(x)$	$\nearrow$ 0 $\nearrow$

On remarque que (C_f) est sumétrique Par rapport à l'origine du repère car f est une fonction impaire

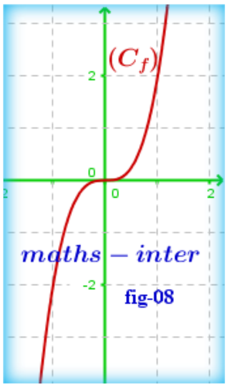
$f(x)$	$\nearrow$ 0 $\nearrow$

On remarque que (C_f) est sumétrique Par rapport à l'origine du repère car f est une fonction impaire

Exemple De Représentation graphique

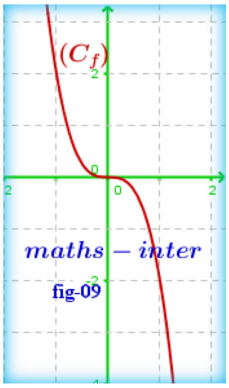
$f(x) = 2x^3$

$f(1) = 2$ et $f(0) = 0$ et $f(-1) = -2$



$f(x) = -2x^3$

$f(1) = -2$ et $f(0) = 0$ et $f(-1) = 2$



VI. Fonctions irrationnelles simples : $\pm\sqrt{x-a}$ و $\pm\sqrt{a-x}$:

1) Considèrons les fonctions : $f_1(x) = \sqrt{x-a}$ **et** $f_2(x) = -\sqrt{x-a}$ **avec** $a \in IR$

On a $D_{f_1} = D_{f_2} = [a;\ +\infty[$

Le taux d'accroissement de f_1 **est:**

$$T_{f_1} = \frac{f_1(x)-f_1(y)}{x-y} = \frac{\sqrt{x-a}-\sqrt{y-a}}{x-y} = \frac{(x-y)}{(x-y)(\sqrt{x-a}+\sqrt{y-a})} = \frac{1}{\sqrt{x-a}+\sqrt{y-a}} > 0$$

d'où :

f_1 **est croissante sur** $[a;\ +\infty[$ **, et puisque** $f_2(x) = -f_1(x)$ **alors** f_2 **est décroissante sur** $[a;\ +\infty[$

2) Considèrons les fonctions : $g_1(x) = \sqrt{a-x}$ **et** $g_2(x) = -\sqrt{a-x}$ **avec** $a \in IR$

On a $D_{g_1} = D_{g_2} =]-\infty;\ a]$

Le taux d'accroissement de g_1 **est:**

$$T_{g_1} = \frac{g_1(x)-g_1(y)}{x-y} = \frac{\sqrt{a-x}-\sqrt{a-y}}{x-y} = \frac{-(x-y)}{(x-y)(\sqrt{a-x}+\sqrt{a-y})} = \frac{-1}{\sqrt{x-a}+\sqrt{y-a}} < 0$$

d'où :

g_1 **est décroissante sur** $]-\infty;\ a]$ **, et puisque** $g_2(x) = -g_1(x)$ **alors** g_2 **est croissante sur** $]-\infty;\ a]$

D'où le résumé suivant :

$f_1(x) = \sqrt{x-a}$ **et** $f_2(x) = -\sqrt{x-a}$

Tableau de Variations

Le tableau de variations de f_1 sur $[a;\ +\infty[$

x	a $\qquad$ $+\infty$
$f_1(x)$	$\nearrow$

Le tableau de variations de f_2 sur $[a;\ +\infty[$

$g_1(x) = \sqrt{a-x}$ **et** $g_2(x) = -\sqrt{a-x}$

Le tableau de variations de g_1 sur $[a;\ +\infty[$

x	$-\infty$ $\qquad$ a
$g_1(x)$	$\searrow$

Le tableau de variations de g_2 sur $[a;\ +\infty[$

De La fonction f

x	a $\quad\quad$ $+\infty$
$f_2(x)$	↘

On remarque $(C_{f_1}) \cup (C_{f_2})$ est une parabole de sommet $A(a\,;\,0)$

D'axe (Ox) et orientée vers la droite

x	$-\infty$ $\quad\quad$ a
$g_2(x)$	↗

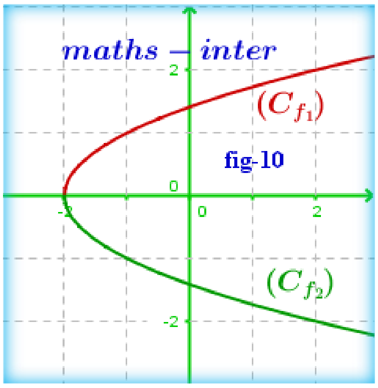
On remarque $(C_{g_1}) \cup (C_{g_2})$ est une parabole de sommet $A(a\,;\,0)$

D'axe (Ox) et orientée vers la gauche

Exemple De Représentation graphique

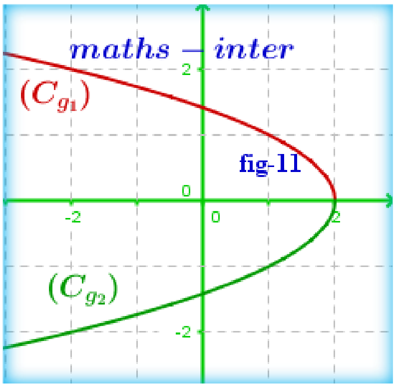
$f_1(x) = \sqrt{x-a}$ et $f_2(x) = -\sqrt{x-a}$

$f(1) = 2$ et $f(0) = 0$ et $f(-1) = -2$



$g_1(x) = \sqrt{a-x}$ et $g_2(x) = -\sqrt{a-x}$

$f(1) = -2$ et $f(0) = 0$ et $f(-1) = 2$

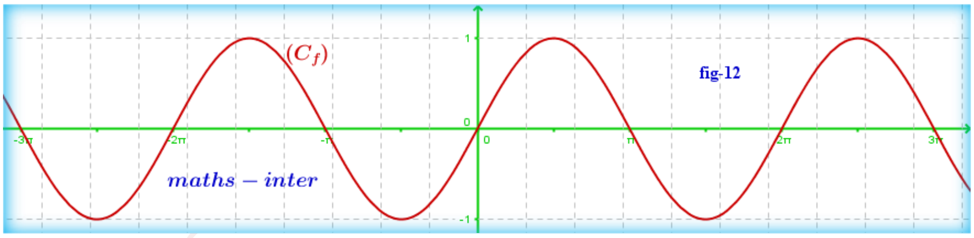


VII. Les fonctions trigonométriques :

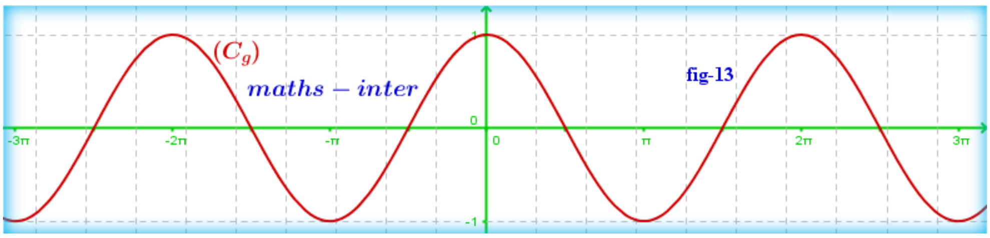
Considérons les fonctions f ; g et h tels que : $f(x) = \sin x$; $g(x) = \cos x$ et $h(x) = \tan x$

Les courbes de ces fonctions sont tracées, en se basant sur le cercle trigonométrique :

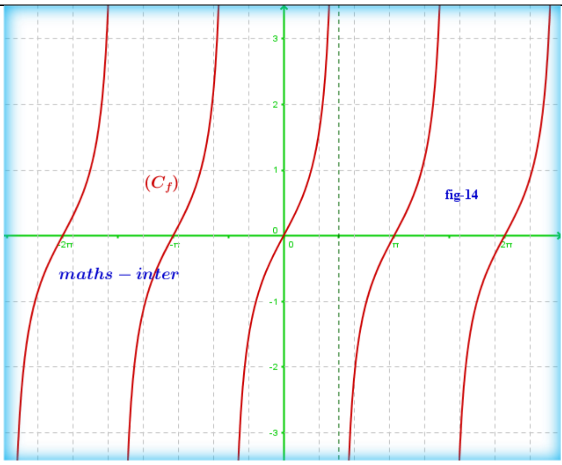
$f(x) = \sin x$



$g(x) = \cos x$



$h(x) = \tan x$



Bonne Chance