Cours *fonctions exponentielles*

PROF : ATMANI NAJIB

2ème BAC Sciences Physiques et Sciences de la Vie et de la Terre (2BAC PC et SVT)

FONCTIONS EXPONENTIELLES

I) LA FONCTION EXPONENTIELLE NEPERIENNE

1) Définition et propriétés :

La fonction ln est continue strictement croissante sur]0, +∞[et ln(]0, +∞[) =] $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x$; $\lim\limits_{x\to+\infty} lnx$ [= ℝ

Propriété et définition :
La fonction ln admet une fonction réciproque définie de] − ∞, +∞[vers]0, +∞[appelée fonction Exponentielle népérienne notée : exp

Propriétés :
1) $(\forall x \in \mathbb{R})(ln(exp(x)) = x)$
2) $(\forall x \in \mathbb{R}+*)(exp(ln(x)) = x$
3) $(\forall x \in \mathbb{R}+*)(\forall y \in \mathbb{R})(ln(x) = y \Leftrightarrow x = exp(y))$
4) $exp(0) = 1$; $exp(1) = e$

Propriété : (monotonie) : La fonction exp est continue strictement croissante sur ℝ.

Résultat :
1) $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})(exp(x) = exp(y) \Leftrightarrow x = y)$
2) $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})(exp(x) \le exp(y) \Leftrightarrow x \le y)$

Exemple : Résoudre les équations et inéquations suivantes dans ℝ :

$1)\exp\left(\frac{x+5}{2x+3}\right)=\exp\left(\frac{1}{x-1}\right)$ $2)\exp(2x+1)\le\exp\left(\frac{6}{x}\right)$

Solution :1) $ln(x-2)=0$

a)cette équation est définie ssi : $2x+3\neq 0$ et $x-1\neq 0$donc: $x\neq -\frac{3}{2}$ et $x\neq 1$donc : $D_E=\mathbb{R}-\left\{-\frac{3}{2};1\right\}$

b) Résoudre l'équation :

$$\exp\left(\frac{x+5}{2x+3}\right)=\exp\left(\frac{1}{x-1}\right)\Leftrightarrow\frac{x+5}{2x+3}=\frac{1}{x-1}$$

$$(x+5)(x-1)=2x+3\Leftrightarrow x^2+2x-8=0$$

$$\Delta=b^2-4ac=2^2-4\times(-8)\times 1=4+32=36>0$$

$x_1=\frac{-2+6}{2\times 1}=\frac{4}{2}=2$ et $x_1=\frac{-2-6}{2\times 1}=\frac{-8}{2}=-4$

Donc : $S=\{-4;2\}$

$2)\exp(2x+1)\le\exp\left(\frac{6}{x}\right)$

a)cette inéquation est définie ssi : $x\neq 0$ donc : $D_I=\mathbb{R}^*$

$2)\exp(2x+1)\le\exp\left(\frac{6}{x}\right)\Leftrightarrow 2x+1\le\frac{6}{x}$

$\Leftrightarrow\frac{2x^2+x-6}{x}\le 0$

x	$-\infty$		-2		0		$3/2$		$+\infty$
$2x+x-6$		$-$	0	$+$	|	$+$	0	$-$	
x		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
$q(x)$		$+$	0	$-$	||	$+$	0	$-$	

$S=]-\infty,-2]\cup\left]0,\frac{3}{2}\right]$

2) l'écriture : e^x

Notation : *Pour tout x dans $\mathbb{R}$ on note :* $\exp(x)=e^x$

Propriété algébrique :
Pour tout x et y dans $\mathbb{R}$ on a :

1) $e^{x+y}=e^x\times e^y$ 2) $e^{-x}=\frac{1}{e^x}$ 3) $e^{x-y}=\frac{e^x}{e^y}$

4) $e^{rx}=(e^x)^r$ $(r\in\mathbb{Q})$ 5) $(e^{\ln x}=x)$ $(\forall x\succ 0)$
6) $(\ln(e^x)=x)$ $(\forall x\in\mathbb{R})$
7) $(\forall y\succ 0)(\forall x\in\mathbb{R})(e^x=y)\Leftrightarrow(x=\ln y)$
8) $(\forall y\succ 0)(\forall x\in\mathbb{R})(e^x=e^y)\Leftrightarrow(x=y)$
9) $(\forall y\succ 0)(\forall x\in\mathbb{R})(e^x\ge e^y)\Leftrightarrow(x\ge y)$

Exemples : Résoudre les équations et inéquations suivantes dans ℝ :

1) $e^{1-x}\times e^{2x}=e$ 2) $\frac{e^{2-x}}{e^{1+2x}}=e^{x-1}$

3) $e^{2x}-5e^{x}+6=0$ 4) $e^{x^2}\cdot\left(e^{x}\right)^{3}=\left(e^{-x}\right)^{5}\cdot e^{-7}$

5) $e^{2x-3}-(e+1)e^{x-2}+1\prec 0$

Solution :1) $e^{1-x}\times e^{2x}=e \Leftrightarrow e^{2x+1-x}=e^{1}$

$\Leftrightarrow e^{x+1}=e^{1}\Leftrightarrow x+1=1\Leftrightarrow x=0$ donc : $S=\{0\}$

2) $\dfrac{e^{2-x}}{e^{1+2x}}=e^{x-1}\Leftrightarrow e^{(2-x)-(1+2x)}=e^{x-1}$

$\Leftrightarrow (2-x)-(1+2x)=x-1\Leftrightarrow -4x=-2\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}$

Donc : $S=\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$

3) $e^{2x}-5e^{x}+6=0\Leftrightarrow \left(e^{x}\right)^{2}-5e^{x}+6=0$ on pose : $e^{x}=X$

Donc : $X^{2}-5X+6=0$ $\quad \Delta=b^{2}-4ac=25-24=1>0$

$X_1=\dfrac{5+1}{2\times1}$ et $X_2=\dfrac{5-1}{2\times1}$ donc : $X_1=3$ et $X_2=2$

Donc : $e^{x_1}=3$ et $e^{x_2}=2$ donc : $x_1=\ln 3$ et $x_2=\ln 2$

Donc : $S=\{\ln 2,\ln 3\}$

4) cette équation est définie dans $\mathbb{R}$

$e^{x^2}\cdot\left(e^{x}\right)^{3}=\left(e^{-x}\right)^{5}\cdot e^{-7}\Leftrightarrow e^{x^2}\cdot e^{3x}=e^{-5x}\cdot e^{-7}$

$\Leftrightarrow e^{x^2+3x}=e^{-5x-7}\Leftrightarrow x^2+3x=-5x-7$

$\Leftrightarrow x^2+8x+7=0$

$\Delta=b^{2}-4ac=8^{2}-4\times7\times1=64-28=36>0$

$x_1=\dfrac{-8+6}{2\times1}=\dfrac{-2}{2}=-1$ et $x_2=\dfrac{-8-6}{2\times1}=\dfrac{-14}{2}=-7$

Donc : $S=\{-7;-1\}$

5) cette équation est définie dans $\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow e^{-3}\left(e^{2x}-(e+1)e^{x+1}+e^{3}\right)\prec 0$

$\Leftrightarrow e^{2x}-(e+1)e^{x+1}+e^{3}\prec 0$ car $e^{-3}\succ 0$

$\Leftrightarrow \left(e^{x}\right)^{2}-\left(e^{2}+e\right)e^{x}+e^{3}\prec 0$

On pose : $e^{x}=t$ on aura : $t^{2}-\left(e^{2}+e\right)t+e^{3}\prec 0$

$t^{2}-\left(e^{2}+e\right)t+e^{3}=(t-e)\left(e^{x}-e^{2}\right)$

2) $e^{2x-3}-(e+1)e^{x-2}+1\prec 0\Leftrightarrow \left(e^{x}-e\right)\left(e^{x}-e^{2}\right)\prec 0$

$\Leftrightarrow \left(e^{x}-e^{1}\right)\left(e^{x}-e^{2}\right)\prec 0$

$\Leftrightarrow (x-1)(x-2)\prec 0$

$\Leftrightarrow x\in]1;2[$ donc : $S=]1;2[$

Propriété : (limites usuelles)

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x}=+\infty$ 2) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x}=0$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{x}}{x}=+\infty$ 4) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{x}}{x^{n}}=+\infty$

5) $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{x}=0^{-}$ 6) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^{n}e^{x}=0$

7) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{e^{x}-1}{x}=1$ avec : $n\in\mathbb{N}^{*}$

Preuve : ces limites se déduisent des limites de La fonction ln

Montrons que : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{x}}{x^{n}}=+\infty$ avec : $n\in\mathbb{N}^{*}$?

On a : $\dfrac{e^{x}}{x^{n}}=\dfrac{\left(e^{\frac{x}{n}}\right)^{n}}{x^{n}}=\left(\dfrac{e^{\frac{x}{n}}}{x}\right)^{n}=\dfrac{1}{n^{n}}\left(\dfrac{e^{\frac{x}{n}}}{\frac{x}{n}}\right)^{n}$

on pose : $t=\dfrac{x}{n}$ $\quad x\to+\infty\Leftrightarrow t\to+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{x}}{x^{n}}=\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{1}{n^{n}}\left(\dfrac{e^{t}}{t}\right)^{n}$ on a $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{e^{t}}{t}=+\infty$

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{x}}{x^{n}}=+\infty$

Montrons que : $\lim\limits_{x\to-\infty} x^{n}e^{x}=0$ avec : $n\in\mathbb{N}^{*}$?

on pose : $t=-x$ donc $x\to+\infty\Leftrightarrow t\to-\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} x^{n}e^{x}=\lim\limits_{t\to+\infty} (-t)^{n}e^{-t}=\lim\limits_{t\to+\infty} (-1)^{n}\dfrac{t^{n}}{e^{t}}=0$ car :

$\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{e^{t}}{t^{n}}=+\infty$

Exemple : Déterminer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{x}}{x^{2}+3x+4}$ 2) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^{5}e^{-\sqrt{-x}}$

3) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{e^{\sin x}-1}{x}$ 4) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{e^{x+1}-e}{x}$

Solution :1) $\dfrac{e^{x}}{x^{2}+3x+4}=\dfrac{e^{x}}{x^{2}\left(1+\dfrac{3}{x}+\dfrac{4}{x^{2}}\right)}=\dfrac{e^{x}}{x^{2}}\dfrac{1}{1+\dfrac{3}{x}+\dfrac{4}{x^{2}}}$

Et on a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x^2}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}1+\dfrac{3}{x}+\dfrac{4}{x^2}=1$

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x^2+3x+4}=+\infty$

2) $\lim\limits_{x\to-\infty}x^5e^{-\sqrt{-x}}$ on pose : $t=\sqrt{-x}$

donc $x\to-\infty\Leftrightarrow t\to+\infty$

$$\lim_{x\to-\infty}x^5e^{-\sqrt{-x}}=\lim_{t\to+\infty}-t^{10}e^{-t}=\lim_{t\to+\infty}-\frac{t^{10}}{e^t}=0$$

3) on a : $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{\sin x}-1}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{\sin x}-1}{\sin x}\times\dfrac{\sin x}{x}=1\times1=1$

Car : $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{\sin x}-1}{\sin x}=1$ (on pose : $t=\sin x$)et $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$

4)On pose : $f(x)=e^{x+1}$ donc : $f(0)=e^{0+1}=e^1=e$

Et : $f'(x)=(x+1)'e^{x+1}=1e^{x+1}=e^{x+1}$ et $f'(0)=e$

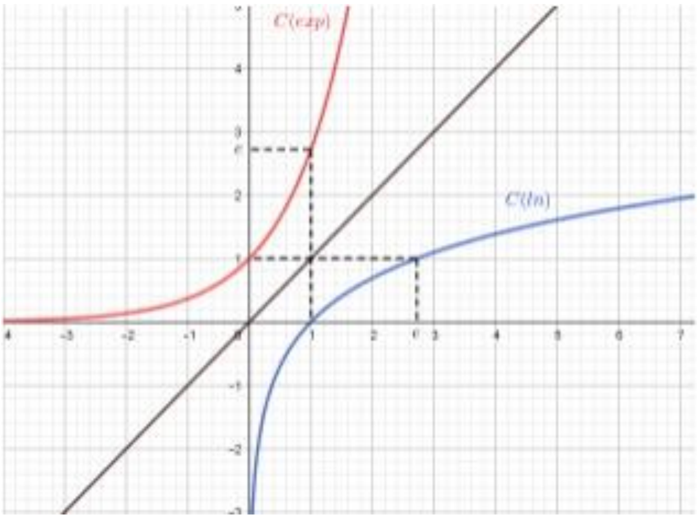
Donc : $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{x+1}-e}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)=e$

3) Représentation de la fonction *exp*

La fonction exp est strictement monotone sur $\mathbb{R}$

Car l'exp est la fonction réciproque de la fonction ln qui est strictement monotone sur $]0, +\infty[$

Les courbes C_{ln} et C_{exp} sont symétriques par rapport à la première bissectrice (Δ) : $y = x$



Le Tableau de variation et L'exp :

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$exp(x)$	0 ↗	1	e	↗ $+\infty$

4) Dérivation de la fonction *exp*

On sait que la fonction exp est la fonction réciproque de la fonction ln qui est dérivable sur $]0, +\infty[$.Et on sait que : $(\forall x\in]0, +\infty[)$ $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$

Donc la fonction exp est dérivable sur $\mathbb{R} = ln(]0, +\infty[)$.

Soit $x\in\mathbb{R}$ on a :

$$exp'(x) = (ln^{-1})'(x)=\frac{1}{\ln'(exp(x))}=exp(x)$$

Car : $\left(f^{-1}\right)'(x)=\dfrac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}$ avec f=ln et ln^{-1}=exp

Propriété : La fonction exp est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $(\forall x\in\mathbb{R})(exp'(x) = exp(x))$

Corolaire : Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I alors la fonction $exp(u(x))$ est dérivable sur I et $(\forall x\in I)(\exp(u(x)))' = u'(x)\ exp(u(x))$

Exemple : Déterminer les dérivées des fonctions suivantes : 1) $f(x)=e^{\sqrt{2x+1}}$

2) $g(x)=e^{-2x^2}-3e^{3x+1}$ 3) $h(x)=e^{\frac{x+1}{-x+3}}$

4) $f(x)=\left(e^x-4\right)\sqrt{e^x-1}$

Solutions : 1) $f(x)=e^{\sqrt{2x+1}}$

la fonction : $u_1:x\to\sqrt{2x+1}$ est dérivable sur

$\left]-\dfrac{1}{2};+\infty\right[$ et $u_1'(x)=\dfrac{(2x+1)'}{2\sqrt{2x+1}}=\dfrac{1}{\sqrt{2x+1}}$

Donc la fonction f est dérivable sur

$\left]-\dfrac{1}{2};+\infty\right[$ et $f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2x+1}}e^{\sqrt{2x+1}}$

2) $g(x)=e^{-2x^2}-3e^{3x+1}$ les fonctions:

$u_1:x\to-2x^2$ et $u_2:x\to3x+1$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et on a :

$u_1'(x)=-4x$ et $u_2'(x)=3$

Donc la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$

et $g'(x) = -4xe^{-2x^2} - 9e^{3x+1}$

3) $h(x) = e^{\frac{x+1}{-x+3}}$ la fonction : $u : x \to \dfrac{x+1}{-x+3}$

est dérivable sur $]3;+\infty[$ et $]-\infty;3[$ et $u'(x) = \dfrac{4}{(x-3)^2}$

Donc la fonction f est dérivable sur $]3;+\infty[$ et

$]-\infty;3[$ et $h'(x) = \dfrac{4}{(x-3)^2} e^{\frac{x+1}{-x+3}}$

4) $f(x) = (e^x - 4)\sqrt{e^x - 1}$

$$f'(x) = \left((e^x-4)\sqrt{e^x-1}\right)' = \left((e^x-4)\right)'\sqrt{e^x-1} + (e^x-4)\left(\sqrt{e^x-1}\right)'$$

$$f'(x) = e^x\sqrt{e^x-1} + (e^x-4)\frac{(e^x-1)'}{2\sqrt{e^x-1}} = e^x\sqrt{e^x-1} + (e^x-4)\frac{e^x}{2\sqrt{e^x-1}}$$

$$f'(x) = \frac{2e^x(e^x-1) + e^x(e^x-4)}{2\sqrt{e^x-1}} = \frac{2e^{2x} - 2e^x + e^{2x} - 4e^x}{2\sqrt{e^x-1}} = \frac{3e^{2x} - 6e^x}{2\sqrt{e^x-1}}$$

5) Primitives et la fonction *exp*

Corolaire : Si u est une fonction dérivable alors une primitive de u'(x) . $e^{u(x)}$ est $e^{u(x)}$.

Exemple : Déterminer les primitives des fonctions suivantes : 1) $f(x) = \dfrac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$ 3) $g(x) = (e^x)^2$

Solutions : 1) $f(x) = \dfrac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$ Si on pose : $u(x) = \sqrt{x}$

On a : $f(x) = 2u'(x)e^{u(x)}$ si $x > 0$ donc

les primitives de f sont :

$$F(x) = 2e^{u(x)} + \lambda = 2e^{\sqrt{x}} + \lambda \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

2) $g(x) = (e^x)^2$ Si on pose : $u(x) = e^x$

On a : $g(x) = u'(x)u(x)$ donc les primitives de g

sont : $G(x) = \dfrac{1}{2}u^2(x) + \lambda = \dfrac{1}{2}(e^x)^2 + \lambda \qquad \lambda \in \mathbb{R}$

Exercice1 : Déterminer une primitive des fonctions suivantes : 1) $I = \mathbb{R}; f(x) = 2e^{3x} - e^{-x}$ 2)

$I =]0;+\infty[; f(x) = \dfrac{e^{2x}}{(e^{2x}-1)^2}$

3) $I = \mathbb{R}; f(x) = e^x(e^x-1)^3$

4) $I = [0;\pi]; f(x) = \sin x e^{\cos x}$

5) $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x - x}$ $I =]0;+\infty[$

Solutions :1) $I = \mathbb{R}; f(x) = 2e^{3x} - e^{-x}$

$$f(x) = 2e^{3x} - e^{-x} = \frac{2}{3}(3x)' e^{3x} + (-x)' e^{-x}$$

$F(x) = \dfrac{2}{3}e^{3x} + e^{-x}$ est une primitive de f sur I

2) $I =]0;+\infty[; f(x) = \dfrac{e^{2x}}{(e^{2x}-1)^2}$

$$f(x) = \frac{e^{2x}}{(e^{2x}-1)^2} = \frac{1}{2}\frac{(e^{2x}-1)'}{(e^{2x}-1)^2}$$

Donc : $F(x) = -\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{e^{2x}-1}$ est une primitive de f sur I

3) $I = \mathbb{R}; f(x) = e^x(e^x-1)^3$

$$f(x) = e^x(e^x-1)^3 = (e^x-1)'(e^x-1)^3$$

donc : $F(x) = \dfrac{1}{3+1}(e^x-1)^{3+1} = \dfrac{1}{4}(e^x-1)^4$ est une primitive de f sur I

4) $I = [0;\pi]; f(x) = \sin x e^{\cos x}$

$$f(x) = \sin x e^{\cos x} = -(\cos x)' e^{\cos x}$$

donc : $F(x) = e^{\cos x}$ est une primitive de f sur I

5) $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x - x} = \dfrac{(e^x - x)'}{e^x - x}$ $I =]0;+\infty[$

donc : $F(x) = \ln|e^x - x|$ est une primitive de f sur I

6) Etudes des fonctions qui contiennent *exp*

Exemple1: Considérons la fonction f définie par :

$f(x)=(x-1)e^x$

1)Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.
2) Etudier les branches infinies de la courbe Cf au voisinage de $+\infty$
3) Etudier la concavité de la courbe Cf
4) Construire la courbe C_f.

Solution : 1) $D_f=\mathbb{R}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(x-1)e^x=\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x-e^x=0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x-1)e^x=+\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty$

Car : $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0^+$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x=0$

Donc : $y=0$ est une asymptote a (C) au voisinage de $-\infty$

$f'(x)=\left((x-1)e^x\right)'=(x-1)'e^x+(x-1)(e^x)'$

$f'(x)=1e^x+(x-1)e^x=e^x+xe^x-e^x=xe^x$

Le signe de : $f'(x)$ est celui de x

Tableau de variation :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(x-1)e^x}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x-1}{x}e^x$

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x-1}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{x}=1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty$ donc :

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x-1}{x}e^x=1\times(+\infty)=+\infty$

Donc : la courbe Cf admet une branche parabolique dans la direction de l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$
3) Etudie de la concavité de la courbe Cf :

$f''(x)=(xe^x)'=(x)'e^x+x(e^x)'=e^x(1+x)$

Le signe de : $f''(x)$ est celui de : $x+1$

$x+1=0\Leftrightarrow x=-1$

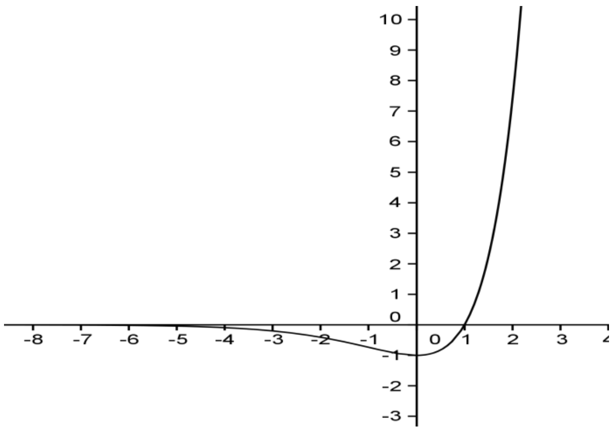
x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$	

Donc :

(C_f) est convexe sur $[-1;+\infty[$

(C_f) est concave sur $]-\infty;-1]$ et $A(-1,-2e^{-1})$ est un point d'inflexion de (C_f)

4)



Exemple2: Considérons la fonction f définie par : $f(x)=x-1+\frac{3}{e^x+1}$

1)déterminer D_f et calculer les limites aux bornes de D_f

2)Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

3)montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R});\ f(x)=x+2-\frac{3e^x}{e^x+1}$

4) Etudier les branches infinies de la courbe Cf
Et étudier la position de la courbe Cf avec les asymptotes obliques

Solutions :

1) $D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/e^x+1\neq 0\right\}$

$e^x+1=0\Leftrightarrow e^x=-1$ pas de solutions car $e^x>0\ \forall x\in\mathbb{R}$

Donc : $D_f=\mathbb{R}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x-1+\frac{3}{e^x+1}=+\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} x-1=+\infty$

Et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3}{e^x+1}=0$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} x-1+\frac{3}{e^x+1}=-\infty$ car $\lim\limits_{x\to-\infty} x-1=-\infty$

Et $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{3}{e^x+1}=3$

2) $f'(x)=\left(x-1+\frac{3}{e^x+1}\right)''=1-3\frac{\left(e^x+1\right)'}{\left(e^x+1\right)^2}=1-3\frac{e^x}{\left(e^x+1\right)^2}$

$$f'(x)=\frac{\left(e^x+1\right)^2-3e^x}{\left(e^x+1\right)^2}=\frac{\left(e^x\right)^2+2e^x+1-3e^x}{\left(e^x+1\right)^2}=\frac{\left(e^x\right)^2-e^x+1}{\left(e^x+1\right)^2}$$

Le signe de : $f'(x)$ est celui de : $\left(e^x\right)^2-e^x+1$

On pose : $e^x=X$ donc on a : $X^2-X+1=0$

$\Delta=b^2-4ac=1-4=-3<0$

Donc : $X^2-X+1\succ0$ (signe de a)

Donc : $\left(e^x\right)^2-e^x+1>0$ par suite: $f'(x)>0$

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$

3)montrons que : $(\forall x\in\mathbb{R})$; $f(x)=x+2-\frac{3e^x}{e^x+1}$

$$f(x)=x-1+\frac{3}{e^x+1}=x+2-3+\frac{3}{e^x+1}$$

$$f(x)=x+2+\frac{-3\left(e^x+1\right)+3}{e^x+1}=x+2+\frac{-3e^x-3+3}{e^x+1}$$

$$f(x)=x+2-\frac{3e^x}{e^x+1}$$

4) Etude des branches infinies ?

a)On a $f(x)=x-1+\frac{3}{e^x+1}$ donc $f(x)-(x-1)=\frac{3}{e^x+1}$

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-(x-1)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3}{e^x+1}=0$

Par suite :la droite d'équation $(\Delta)\ y=x-1$ est une asymptote oblique a la courbe Cf au voisinage de $+\infty$ et on a aussi : $f(x)-(x-1)=\frac{3}{e^x+1}>0$

Donc :la courbe Cf est au-dessus de la droite d'équation $(\Delta)\ y=x-1$

b) On a $f(x)=x+2-\frac{3e^x}{e^x+1}$ donc $f(x)-(x+2)=-\frac{3e^x}{e^x+1}$

Donc : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)-(x+2)=\lim\limits_{x\to-\infty}-\frac{3e^x}{e^x+1}=0$

Par suite :la droite d'équation $(D)\ y=x+2$ est une asymptote oblique a la courbe Cf au voisinage de $-\infty$ et on a aussi : $f(x)-(x+2)=-\frac{3e^x}{e^x+1}<0$

Donc :la courbe Cf est au-dessous de la droite d'équation $(D)\ y=x+2$

Exemple3: Considérons la fonction f définie par : $f(x)=\left(e^x-4\right)\sqrt{e^x-1}$

1)déterminer D_f et calculer les limites aux bornes de D_f

2)montrer que : $\left(\forall x\in\mathbb{R}_*^+\right)$ $\frac{f(x)}{x}=\frac{e^x-4}{\sqrt{e^x-1}}\cdot\frac{e^x-1}{x}$

3) Etudier la dérivabilité de la fonction f à droite de 0 et interpréter géométriquement le résultat obtenu

4) montrer que : $\left(\forall x\in\mathbb{R}_*^+\right)$ $f'(x)=\frac{3e^x\left(e^x-2\right)}{2\sqrt{e^x-1}}$

5)Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

6) Etudier les branches infinies de la courbe C_f Au voisinage de $+\infty$

7)calculer : $f(2\ln 2)$ et construire la courbe C_f.

Solutions : 1) $D_f=\left\{x\in\mathbb{R}\,/\,e^x-1\geq0\right\}$

$e^x-1\geq0\Leftrightarrow e^x\geq1\Leftrightarrow x\geq\ln1\Leftrightarrow x\geq0$

Donc : $D_f=\mathbb{R}^+$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^x-4\right)\sqrt{e^x-1}=+\infty$

Car : $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x}-4=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{e^{x}-1}=+\infty$

2) $\dfrac{f(x)}{x}=\dfrac{\left(e^{x}-4\right)\sqrt{e^{x}-1}}{x}=\dfrac{\left(e^{x}-4\right)\left(\sqrt{e^{x}-1}\right)^{2}}{x\sqrt{e^{x}-1}}$

$\dfrac{f(x)}{x}=\dfrac{\left(e^{x}-4\right)\left(e^{x}-1\right)}{x\sqrt{e^{x}-1}}=\dfrac{e^{x}-4}{\sqrt{e^{x}-1}}\cdot\dfrac{e^{x}-1}{x}$

3) $\lim\limits_{x\to0^{+}}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^{+}}\dfrac{e^{x}-4}{\sqrt{e^{x}-1}}\cdot\dfrac{e^{x}-1}{x}$

$=\lim\limits_{x\to0^{+}}\dfrac{e^{x}-4}{\sqrt{e^{x}-1}}\cdot\lim\limits_{x\to0^{+}}\dfrac{e^{x}-1}{x}$ puisque : $\lim\limits_{x\to0^{+}}\dfrac{e^{x}-1}{x}=1$

.

Et $\lim\limits_{x\to0^{+}} e^{x}-4=-3$ et $\lim\limits_{x\to0^{+}}\sqrt{e^{x}-1}=0^{+}$

Donc : $\lim\limits_{x\to0^{+}}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=-\infty$

Donc la fonction f n'est pas dérivable
à droite de 0

Interprétation géométriquement :

la courbe Cf admet une demie tangente vertical adroite du point $O(0;0)$ dirigé vers le bas

car : $\lim\limits_{x\to0^{+}}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=-\infty$ $\quad(+)\times(-)=(-)$

4) montrons que : $\left(\forall x\in\mathbb{R}_{*}^{+}\right)$ $f'(x)=\dfrac{3e^{x}\left(e^{x}-2\right)}{2\sqrt{e^{x}-1}}$?

$$f'(x)=\left(\left(e^{x}-4\right)\sqrt{e^{x}-1}\right)'=\left(e^{x}-4\right)'\sqrt{e^{x}-1}+\left(e^{x}-4\right)\left(\sqrt{e^{x}-1}\right)'$$

$$f'(x)=e^{x}\sqrt{e^{x}-1}+\left(e^{x}-4\right)\frac{\left(e^{x}-1\right)'}{2\sqrt{e^{x}-1}}=e^{x}\sqrt{e^{x}-1}+\frac{e^{x}\left(e^{x}-4\right)}{2\sqrt{e^{x}-1}}$$

$$f'(x)=\frac{2e^{x}\left(\sqrt{e^{x}-1}\right)^{2}+e^{x}\left(e^{x}-4\right)}{2\sqrt{e^{x}-1}}=\frac{2e^{x}\left(e^{x}-1\right)+e^{x}\left(e^{x}-4\right)}{2\sqrt{e^{x}-1}}$$

$$f'(x)=\frac{2e^{2x}-2e^{x}+e^{2x}-4e^{x}}{2\sqrt{e^{x}-1}}=\frac{3e^{2x}-6e^{x}}{2\sqrt{e^{x}-1}}=\frac{3e^{x}\left(e^{x}-2\right)}{2\sqrt{e^{x}-1}}$$

5)le signe de : $f'(x)$ est celui de $e^{x}-2$

car $\dfrac{3e^{x}}{2\sqrt{e^{x}-1}}>0\ \left(\forall x\in\mathbb{R}_{*}^{+}\right)$

$e^{x}-2>0\Leftrightarrow e^{x}>2\Leftrightarrow x>\ln 2$

$f(\ln 2)=\left(e^{\ln 2}-4\right)\sqrt{e^{\ln 2}-1}=(2-4)\sqrt{2-1}=-2$

x	0		$\ln 2$		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

6) Etude des branches infinies de la courbe C_f

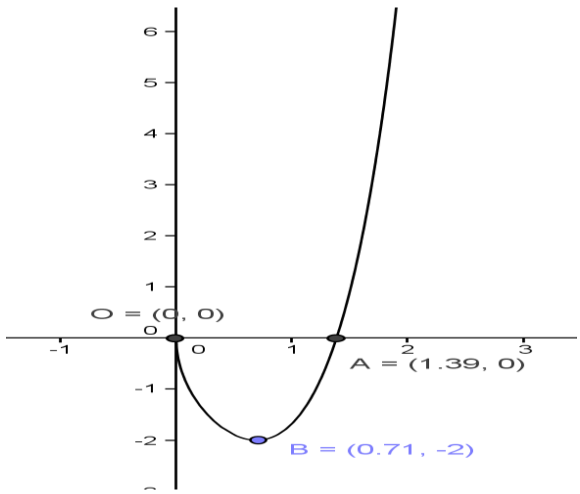
Au voisinage de $+\infty$?

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{e^{x}}{x}-\dfrac{4}{x}\right)\sqrt{e^{x}-1}$

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{x}}{x}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4}{x}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{e^{x}-1}=+\infty$

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=+\infty$ Donc : la courbe Cf admet une branche parabolique dans la direction de l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$

$f(2\ln 2)=\left(e^{2\ln 2}-4\right)\sqrt{e^{2\ln 2}-1}=\left(e^{\ln 4}-4\right)\sqrt{e^{\ln 4}-1}=(4-4)\sqrt{4-1}=0$



Exercice2 : Considérons la fonction f définie par :

$f(x)=\sqrt{e^{-x}-e^{-2x}}$

1)déterminer D_f et calculer les limites aux

bornes de D_f

2) Etudier la continuité et la dérivabilité de la fonction f à droite de 0 et interpréter géométriquement le résultat obtenu

3)Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

4) construire la courbe C_f.

Solutions : 1) $D_f = \{x \in \mathbb{R} / e^{-x} - e^{-2x} \geq 0\}$

$e^{-x} - e^{-2x} \geq 0 \Leftrightarrow e^{-x} \geq e^{-2x} \Leftrightarrow -x \geq -2x \Leftrightarrow x \geq 0$

Donc : $D_f = [0;+\infty[$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{e^{-x} - e^{-2x}} = 0$

Car : $\lim_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} e^{-2x} = 0$

2) a) $\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+} \sqrt{e^{-x} - e^{-2x}} = 0 = f(0)$

Donc f est continue à droite de 0

b)

$$\lim_{x\to0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to0^+} \frac{\sqrt{e^{-x}-e^{-2x}}}{x} = \lim_{x\to0^+} \sqrt{\frac{e^{-x}\left(1-e^{-x}\right)}{x^2}}$$

$= \lim_{x\to0^+} \sqrt{\frac{e^{-x}}{x} \times \frac{e^{-x}-1}{-x}}$ on a : $\lim_{x\to0^+} \frac{e^{-x}}{x} = +\infty$ et $\lim_{x\to0^+} \frac{e^{-x}-1}{-x} = 1$

Donc : $\lim_{x\to0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = +\infty$

Donc la fonction f n'est pas dérivable à droite de 0

Interprétation géométriquement :

la courbe Cf admet une demie tangente vertical adroite du point $O(0;0)$ dirigé vers le haut

car : $\lim_{x\to0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = +\infty \quad (+)\times(+) = (+)$

3)Etude des variations de f :

$$f'(x) = \left(\sqrt{e^{-x}-e^{-2x}}\right)' = \frac{\left(e^{-x}-e^{-2x}\right)'}{2\sqrt{e^{-x}-e^{-2x}}^{2}}$$

$$f'(x) = \frac{-e^{-x}+2e^{-2x}}{2\sqrt{e^{-x}-e^{-2x}}^{2}} = \frac{e^{-x}\left(2e^{-x}-1\right)}{2\sqrt{e^{-x}-e^{-2x}}^{2}}$$

le signe de : $f'(x)$ est celui de $2e^{-x}-1$

car $\frac{e^{-x}}{2\sqrt{e^{-x}-e^{-2x}}^{2}} > 0 \ \left(\forall x \in \mathbb{R}_*^+\right)$

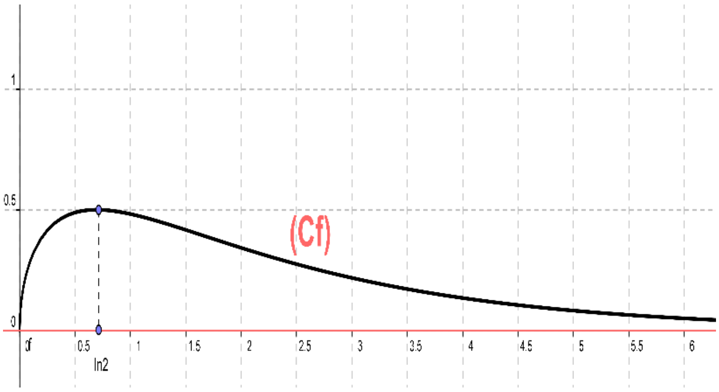
on a : $2e^{-x} - 1 = \frac{1}{e^x}\left(2-e^x\right)$

$2 - e^x > 0 \Leftrightarrow e^x \prec 2 \Leftrightarrow x \prec \ln 2$

$$f(\ln 2) = \sqrt{e^{-\ln 2} - e^{-2\ln 2}} = \sqrt{\frac{1}{e^{\ln 2}} - \frac{1}{e^{2\ln 2}}} = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$

x	0		$ln2$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$1/2$	$\searrow$	0

4) la courbe C_f :



Exercice3 : Considérons la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}$$

1)déterminer D_f et calculer les limites aux bornes de D_f

2)Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

3) montrer que f admet une fonction réciproque définie sur un intervalle J que l'on déterminera

4) déterminer : $f^{-1}(x) \quad \forall x \in J$

Solutions : $f(x) = \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}$

$D_f = \{x \in \mathbb{R} / 1 - e^{2x} > 0\}$

$1 - e^{2x} > 0 \Leftrightarrow 1 > e^{2x} \Leftrightarrow e^0 > e^{2x} \Leftrightarrow 0 > 2x \Leftrightarrow x < 0$

Donc : $D_f =]-\infty, 0[$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}=\frac{0}{\sqrt{1-0}}=0$$

$$\lim_{x\to0^-} f(x)=\lim_{x\to0^-}\frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}=\lim_{x\to0^-}\frac{e^x}{\sqrt{e^{2x}\left(\frac{1}{e^{2x}}-1\right)}}=+\infty$$

Car : $\lim\limits_{x\to0^-}\sqrt{e^{2x}\left(\frac{1}{e^{2x}}-1\right)}=0^+$

2) $f'(x)=\left(\frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}\right)'=\frac{(e^x)'\sqrt{1-e^{2x}}-e^x\left(\sqrt{1-e^{2x}}\right)'}{\left(\sqrt{1-e^{2x}}\right)^2}$

$$f'(x)=\frac{e^x\sqrt{1-e^{2x}}-e^x\frac{(1-e^{2x})'}{2\sqrt{1-e^{2x}}}}{\left(\sqrt{1-e^{2x}}\right)^2}=\frac{\frac{2e^x(1-e^{2x})+2e^xe^{2x}}{2\sqrt{1-e^{2x}}}}{1-e^{2x}}$$

$$f'(x)=\frac{2e^x-2e^{3x}+2e^{3x}}{2\sqrt{1-e^{2x}}(1-e^{2x})}=\frac{2e^x}{2\sqrt{1-e^{2x}}(1-e^{2x})}>0$$

$\forall x\in\left]-\infty,0\right[$

x	$-\infty$ $\qquad$ 0
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$0 \nearrow +\infty$

3) on a f est une fonction continue et strictement croissante sur $I=\left]-\infty,0\right[$ donc f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur l' intervalle

$J=f(I)=f\left(\left]-\infty,0\right[\right)=\left]0;+\infty\right[$

$$\begin{cases} f(y)=x \\ y\in I\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} y=f^{-1}(x) \\ x\in J\end{cases}$$

$$\begin{cases}\frac{e^y}{\sqrt{1-e^{2y}}}=x \\ y\in\left]-\infty,0\right[\end{cases}\Leftrightarrow\left(\frac{e^y}{\sqrt{1-e^{2y}}}\right)^2=x^2\Leftrightarrow\frac{e^{2y}}{1-e^{2y}}=x^2$$

$$e^{2y}=x^2\left(1-e^{2y}\right)\Leftrightarrow e^{2y}=x^2-x^2e^{2y}\Leftrightarrow e^{2y}+x^2e^{2y}=x^2$$

$$e^{2y}\left(1+x^2\right)=x^2\Leftrightarrow e^{2y}=\frac{x^2}{1+x^2}\Leftrightarrow 2y=\ln\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)$$

$$\Leftrightarrow y=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)\Leftrightarrow y=\ln\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)^{\frac{1}{2}}\Leftrightarrow y=\ln\sqrt{\frac{x^2}{1+x^2}}$$

Donc: $f^{-1}(x)=\ln\sqrt{\frac{x^2}{1+x^2}}\quad\forall x\in\left]0;+\infty\right[$

Exercice4 : Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=1-\ln\left(1+e^{-x}\right)$ et soit (C) la courbe De f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ avec $\|\vec{i}\|=2cm$

1)a)montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$ et interpréter géométriquement le résultat

b) montrer que : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

2)a)vérifier que: $\forall x\in\mathbb{R}$; $f(x)=x+1-\ln\left(1+e^x\right)$

b) en déduire la droite (D) d'équation : $y=x+1$ est une asymptote oblique a la courbe Cf au voisinage de $-\infty$

c) étudier la position de la courbe Cf avec la droite (D)

3)a) montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}$; $f'(x)=\frac{1}{1+e^x}$

b) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

c) Etudier la concavité de Cf

d) montrer que la courbe Cf coupe l'axe des abscisses en un point à déterminer

4) Construire la courbe C_f dans le repére$(O;\vec{i}\ \vec{j})$

5) a)montrer que f admet une fonction réciproque définie sur un intervalle J que l'on déterminera

b) déterminer : $f^{-1}(x)\ \ \forall x\in J$

Solutions : $f(x)=1-\ln\left(1+e^{-x}\right)$

1)a)

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}1-\ln\left(1+e^{-x}\right)=\lim_{x\to+\infty}1-\ln\left(1+\frac{1}{e^x}\right)=1$$

Car $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x}=0$

Interprétation géométriquement :

$y=1$ est une asymptote a(C) au voisinage de $+\infty$

1)b) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} 1-\ln\left(1+\frac{1}{e^x}\right)=-\infty$

Car: $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{e^x}=+\infty$

2)a)Montrons que: $\forall x\in\mathbb{R}$; $f(x)=x+1-\ln\left(1+e^x\right)$?

$$f(x)=1-\ln\left(1+e^{-x}\right)=1-\ln\left(1+\frac{1}{e^x}\right)=1-\ln\left(\frac{e^x+1}{e^x}\right)$$

$$f(x)=1-\ln\left(e^x+1\right)+\ln\left(e^x\right)=1-\ln\left(e^x+1\right)+x$$

Donc: $f(x)=x+1-\ln\left(e^x+1\right)\quad \forall x\in\mathbb{R}$

2)b)on a : $f(x)=x+1-\ln\left(e^x+1\right)$

Donc : $f(x)-(x+1)=-\ln\left(e^x+1\right)$

Donc: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)-(x+1)=\lim\limits_{x\to-\infty} -\ln\left(e^x+1\right)=0$ car: $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$

Par suite :la droite d'équation $(D): y=x+1$ est une asymptote oblique à la courbe Cf au voisinage de $-\infty$

2)c) $f(x)-(x+1)=-\ln\left(e^x+1\right)$

On a : $e^x>0\quad \forall x\in\mathbb{R}$ donc : $e^x+1>1$

Donc: $\ln\left(e^x+1\right)>\ln 1$ Donc: $\ln\left(e^x+1\right)>0$

Donc: $-\ln\left(e^x+1\right)<0$

Donc :la courbe Cf est au-dessous de la droite d'équation $(D): y=x+1$

3)a)montrons que : $\forall x\in\mathbb{R}, f'(x)=\frac{1}{1+e^x}$?

$$f'(x)=\left(x+1-\ln\left(1+e^x\right)\right)'=1-\frac{\left(1+e^x\right)'}{1+e^x}=1-\frac{e^x}{1+e^x}$$

$$f'(x)=\frac{1+e^x-e^x}{1+e^x}=\frac{1}{1+e^x}>0\quad \forall x\in\mathbb{R},$$

3)b) *Tableau de variation :*

x	$-\infty$ $\quad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$-\infty$ $\nearrow$ 1

3)c) Etude de la concavité de Cf :

$$f''(x)=\left(\frac{1}{1+e^x}\right)'=-\frac{\left(1+e^x\right)'}{\left(1+e^x\right)^2}=-\frac{e^x}{\left(1+e^x\right)^2}<0\quad \forall x\in\mathbb{R},$$

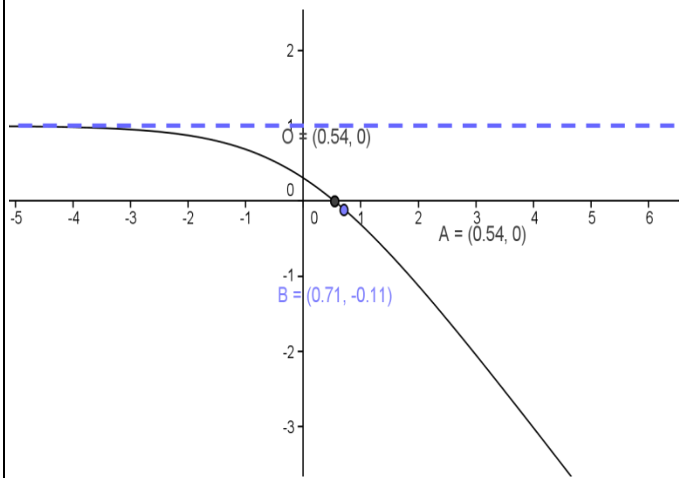
la courbe Cf est convexe dans $\mathbb{R}$,

3)d) $f(x)=0 \Leftrightarrow 1-\ln\left(1+e^{-x}\right)=0 \Leftrightarrow \ln\left(1+e^{-x}\right)=1$

$\Leftrightarrow \ln\left(1+e^{-x}\right)=\ln e \Leftrightarrow e^{-x}=e-1 \Leftrightarrow -x=\ln(e-1)$

$\Leftrightarrow x=-\ln(e-1)$ Donc le point d'intersection de la courbe Cf avec l'axe des abscisses est :

$A(-\ln(e-1);0)$



5) a) on a f est une fonction continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc f admet une fonction réciproque f^{-1}définie sur l' intervalle

$J=f(I)=f(\mathbb{R})=]-\infty;1[$

$$\begin{cases} f(y)=x \\ y\in I \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=f^{-1}(x) \\ x\in J \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1-\ln\left(1+e^{-y}\right)=x \\ y\in\mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow 1-x=\ln\left(1+e^{-y}\right) \Leftrightarrow 1+e^{-y}=e^{1-x}$$

$$e^{-y}=e^{1-x}-1 \Leftrightarrow -y=\ln\left(e^{1-x}-1\right) \Leftrightarrow y=-\ln\left(e^{1-x}-1\right)$$

Donc: $\forall x \in]-\infty;1[\quad f^{-1}(x) = -\ln\left(e^{1-x} - 1\right)$

Exercice5 :

Partie 1 : Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}+$ par : $f(x) = (x+2)e^{\frac{-2}{x}}$ si $x > 0$ et $f(0) = 0$

1) Etudier la continuité et la dérivabilité de la fonction f à droite de 0.

2) Interpréter géométriquement le résultat obtenu.

3) Déterminer la limite en $+\infty$

4) Déterminer la fonction dérivée de la fonction f puis dresser le tableau de variation de f.

5) a) Montrer que $(\forall t > 0)$ $0 \prec e^{-t} + t - 1 \prec \frac{t^2}{2}$

b) En déduire que : $(\forall x > 0)$

$$\frac{-4}{x} \prec f(x) - x \prec \frac{4}{x^2} - \frac{2}{x}$$

c) Déterminer la nature de la branche infinie de la courbe Cf au voisinage de $+\infty$

6) Construire la courbe C_f.

Partie 2 :

Considérons la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$f_n(x) = (x+2n)e^{\frac{-2}{x}} \text{ si } x > 0 \text{ et } f_n(0) = 0$$

où $n \in \mathbb{N}^*$

1) a) Etudier la continuité et la dérivabilité de la fonction f_n à droite de 0.

b) Déterminer la limite en $+\infty$

c) Déterminer la fonction dérivée de la fonction f_n puis dresser le tableau de variation de f_n.

2) Montrer que l'équation $f_n(x) = \frac{2}{n}$ admet une solution unique α_n dans $]0, +\infty[$

3)a) Montrer que $(\forall x > 0)$

$$f_{n+1}(x) - \frac{2}{n+1} \succ f_n(x) - \frac{2}{n}$$

b) En déduire la monotonie de $(\alpha_n)_n$

c) Montrer que la suite $(\alpha_n)_n$ est convergente et que $\lim_{n\to+\infty}(\alpha_n)_n = 0$

II) LA FONCTION EXPONENTIELLE DE BASE a.

1) Définition et résultats :

Propriété et définition : Soit a un réel strictement positif et différent de 1. La fonction $\log_a$ étant continue et strictement monotone sur $]0, +\infty[$, elle admet donc une fonction réciproque de $\mathbb{R}= \log_a(]0, +\infty[)$ vers $]0, +\infty[$.

Cette fonction réciproque s'appelle la fonction exponentielle de base a et se note ***expₐ***

Propriété : Soit $a > 0$ et $a \neq 1$; on a :

$(\forall x \in \mathbb{R})$ $\exp_a(x) = e^{x\ln a}$

Preuve : Posons : $y = \exp_a(x)$

on a donc $y > 0$ et $x = \log_a y = \frac{\ln y}{\ln a}$

D'où : $\ln y = x\ln a$; finalement $y = e^{x\ln a}$

D'où la propriété.

Résultats immédiats : Soit $a > 0$ et $a \neq 1$

fonction $\exp_a$ est définie sur $\mathbb{R}$

1) $\forall x \in \mathbb{R}\quad \exp_a(x) \succ 0$

2) $\forall x \in \mathbb{R}\quad \forall y \in \mathbb{R}_+^*\ \exp_a(x) = y \Leftrightarrow x = \log_a y$

3) $\forall x \in \mathbb{R}\ \log_a(\exp_a(x)) = x$

4) $\forall x \in \mathbb{R}_+^*\ \exp_a(\log_a(x)) = x$

Propriété caractéristique :

Soit $a > 0$ et $a \neq 1$; on a : $(\forall (x, y) \in \mathbb{R}2$

$\exp_a(x+y) = \exp_a(x) + \exp_a(y)$

Conséquences :

Soit $a > 0$ et $a \neq 1$ et x et y deux réels, on a :

1) $\exp_a(-x) = \frac{1}{\exp_a(x)}$ 2) $\exp_a(x-y) = \frac{\exp_a(x)}{\exp_a(y)}$

3) $\exp_a(rx) = (\exp_a x)^r$

Propriété : $\exp_a$ est dérivable sur $\mathbb{R}$

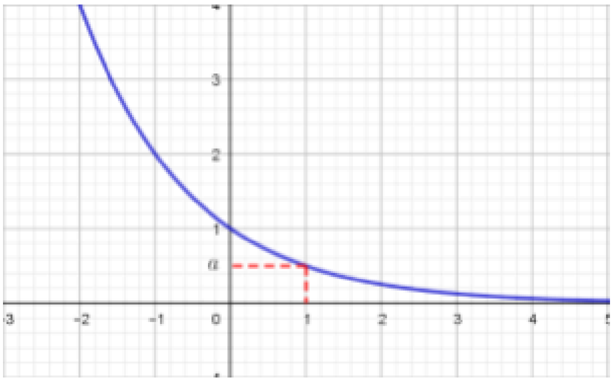
$$(\forall x \in \mathbb{R})\left(\exp_a(x)\right)' = (\ln a)e^{x\ln a} = (\ln a)a^x$$

Monotonie et étude et représentation :

Si $0 < a < 1$:
On a $ln(a) < 0$ et par suite : $(\forall x \in \mathbb{R})(exp_a'(x) < 0)$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

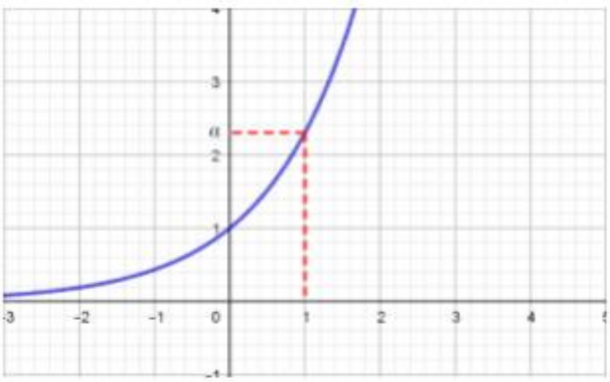
x	$-\infty$ 0 1 $+\infty$
$exp_a'(x)$	$-$ $-$ $-$
$exp_a(x)$	$+\infty$ ↘ 1 ↘ a ↘ 0



Si $0 < a < 1$:
On a $ln(a) > 0$ et par suite : $(\forall x \in \mathbb{R})(exp_a'(x) > 0)$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

x	$-\infty$ 0 1 $+\infty$
$exp_a'(x)$	$+$ $+$ $+$
$exp_a(x)$	0 ↗ 1 ↗ a ↗ $+\infty$



2) Une autre écriture de la fonction exp_a et Les puissances réelles.

Rappelle :

1) $(\forall x \in \mathbb{R}*)(x^0 = 1)$
2) $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N}*)$ $(x^n = x\times x\times\ldots\times x \ : n\ fois)$
3) $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N}*)$ $\left(x^{-n} = \frac{1}{x^n}\right)$
4) $(\forall x \in \mathbb{R}*+)(\forall r \in \mathbb{Q})$ $\left(x^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{x^p}\right)$ $(q \in \mathbb{N}*)$

Puissances réelle : La notation a^x

Soit a un réel strictement positif.

1) Si $a = 1$, on pose pour tout réel $x > 0$: $1^x = 1$

2) Si $a \neq 1$, on pose $a^x = e^{x\ln a}$

Propriétés :

$(\forall a \in \mathbb{R}*+)(\forall b \in \mathbb{R}*+)(\forall x \in \mathbb{R})$ $(\forall y \in \mathbb{R})$

1) $a^x \times a^y = a^{x+y}$ 2) $(a\times b)^x = a^x\times b^x$

3) $(a^x)^y = a^{x\times y}$ 4) $a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}$ 5) $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$

6) $(a^x)' = a^x \times \ln a$

a) $x \to a^x$ est strictement croissante si $a \succ 1$

b) $x \to a^x$ est strictement décroissante si $0 \prec a \prec 1$

Exemples : Résoudre les équations et inéquations suivantes dans $\mathbb{R}$:

1) $5^x = 15$ 2) $3^{2x} \geq 5^{1-x}$ 3) $7^{x+1} - 7^{-x} \prec 6$

Solution : 1) $5^x = 15$

$$5^x = 15 \Leftrightarrow e^{x\ln 5} = 15 \Leftrightarrow x\ln 5 = \ln 15 \Leftrightarrow x = \frac{\ln 15}{\ln 5}$$

Donc : $S = \left\{\frac{\ln 15}{\ln 5}\right\}$..

2) $3^{2x} \geq 5^{1-x} \Leftrightarrow \ln\left(3^{2x}\right) \geq \ln\left(5^{1-x}\right)$

$$\Leftrightarrow 2x\ln 3 \geq (1-x)\ln 5 \Leftrightarrow x(2\ln 3 + \ln 5) \geq \ln 5$$

Donc : $S = \left[\frac{\ln 5}{2\ln 3 + \ln 5}; +\infty\right[$

3) $7^{x+1} - 7^{-x} \prec 6 \Leftrightarrow 7^{x+1} - \frac{1}{7^x} \prec 6$ on a $7^x \succ 0$

$7^{2x+1}-1\prec 6\times 7^{x}\Leftrightarrow 7\times\left(7^{x}\right)^{2}-6\times 7^{x}-1\prec 0$

on pose : $t=7^{x}\quad\Leftrightarrow 7t^{2}-6\times t-1\prec 0$

on a : $7t^{2}-6\times t-1=(t-1)(7t+1)$

$7^{x+1}-7^{-x}\prec 6\Leftrightarrow\left(7^{x}-1\right)\left(7\times 7^{x}+1\right)\prec 0$

$\Leftrightarrow\left(7^{x}-1\right)\left(7^{x+1}+1\right)\prec 0\Leftrightarrow 7^{x}-1\prec 0$ car $7^{x+1}\succ 0$

$\Leftrightarrow 7^{x}\prec 1\Leftrightarrow 7^{x}\prec 7^{0}\Leftrightarrow x\prec 0$ car $x\to 7^{x}$ est strictement croissante $(7\succ 1)$ donc : $S=\left]-\infty;0\right[$

Exercice6 : Résoudre les équations et inéquations suivantes dans $\mathbb{R}$:

1) $2^{x+1}=8^{x}$ 2) $3^{x}=12$ 3) $5\times 2^{x}+2^{x+1}-336=0$

4) $100^{x}+40=14\times 10^{x}$

5) $2^{x-1}>4^{x}$ 5) $(0,5)^{2x}\geq(0,5)^{x+1}$

Solution : 1) $2^{x+1}=8^{x}\Leftrightarrow 2^{x+1}=\left(2^{3}\right)^{x}\Leftrightarrow 2^{x+1}=2^{3x}$

$x+1=3x\Leftrightarrow 1=2x\Leftrightarrow\frac{1}{2}=x$ donc : $S=\left\{\frac{1}{2}\right\}$

2) $3^{x}=12\Leftrightarrow x=\log_{3}12$ donc : $S=\left\{\log_{3}12\right\}$

3) $2^{x}-3\times 2^{x+1}-16=0\Leftrightarrow 2^{x}-6\times 2^{x}-16=0$

On pose : $2^{x}=X$ donc : $X^{2}-6X-16=0$

$\Delta=b^{2}-4ac=(-6)^{2}+4\times 1\times 16=100>0$

Donc : $X_{1}=8$ et $X_{2}=-2$

Donc : $2^{x}=8$ et $2^{x}=-2$ or $2^{x}\succ 0$ donc l'équation $2^{x}=-2$ n'a pas de solutions

$2^{x}=8\Leftrightarrow x=\log_{2}8\Leftrightarrow x=\log_{2}2^{3}\Leftrightarrow x=2$ donc : $S=\{3\}$

4) $100^{x}+40=14\times 10^{x}\Leftrightarrow 10^{2x}-14\times 10^{x}+40=0$

$\Leftrightarrow\left(10^{x}\right)^{2}-14\times 10^{x}+40=0$ on pose : $10^{x}=X$

On a alors : $X^{2}-14X+40=0$

$\Delta=b^{2}-4ac=(-14)^{2}-4\times 40=36>0$

$X_{1}=\frac{14+6}{2\times 1}$ et $X_{2}=\frac{14-6}{2\times 1}$ donc : $X_{1}=10$ et $X_{2}=4$

Donc : $10^{x_{1}}=10$ et $10^{x_{2}}=4$ donc **:** $x_{1}=1$ et $x_{2}=\log_{10}4$ Donc : $S=\left\{1,\log_{10}4\right\}$

5) $2^{x-1}>4^{x}\Leftrightarrow 2^{x-1}>\left(2^{2}\right)^{x}\Leftrightarrow 2^{x-1}>2^{2x}\Leftrightarrow x-1>2x$

$\Leftrightarrow -1>x$ donc : $S=\left]-\infty,-1\right[$

6) $(0,5)^{2x}>(0,5)^{x+1}\Leftrightarrow 2x<x+1$ car $x\to(0,5)^{x}$ est strictement décroissante car : $0\prec 0,5\prec 1$

$(0,5)^{2x}>(0,5)^{x+1}\Leftrightarrow x<1$ donc : $S=\left]-\infty,1\right[$

Remarque : a est un réel strictement positif et $a\neq 1$.Si u est une fonction dérivable alors une primitive de $u'(x)a^{u(x)}$ est $\frac{1}{\ln a}a^{u(x)}$

Exemple : Déterminer les primitives de la fonction suivante : $f(x)=3^{x-2}$

Solutions : 1) $f(x)=3^{x-2}$ Si on pose : $u(x)=x-2$

On a : $f(x)=u'(x)3^{u(x)}$ donc les primitives de f sont : $F(x)=\frac{1}{\ln 3}3^{u(x)}+\lambda=\frac{1}{\ln 3}3^{x-2}+\lambda\qquad\lambda\in\mathbb{R}$

Exercice7: Soit La fonction f définie par :

$f(x)=4^{x}-2^{x+1}$

1)déterminer D_{f}

2) calculer les limites aux bornes de D_{f}

3)Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

4) Etudier les branches infinies de la courbe Cf

5) construire la courbe C_{f} dans un repére$\left(O;\vec{i}\ \vec{j}\right)$

Solutions : 1) $f(x)=e^{x\ln 4}-e^{(x+1)\ln 2}$

Donc : $D_{f}=\mathbb{R}$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{2x\ln 2}-e^{(x+1)\ln 2}=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{x\ln 2}\left(e^{x\ln 2}-2\right)=+\infty$

Car : $\lim\limits_{X\to+\infty} e^{X} = +\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f\left(x\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{2x\ln 2} - e^{(x+1)\ln 2} = 0$ Car : $\lim\limits_{X\to-\infty} e^{X} = 0$

3) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ car la somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$:

$\forall x\in\mathbb{R}$: $f'(x) = 2\ln 2\times e^{x\ln 2}\times\left(e^{x\ln 2}-1\right)$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow e^{x\ln 2}-1=0 \Leftrightarrow x=0$

Tableau de variation de f :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

4) Etude des branches infinies de la courbe Cf :

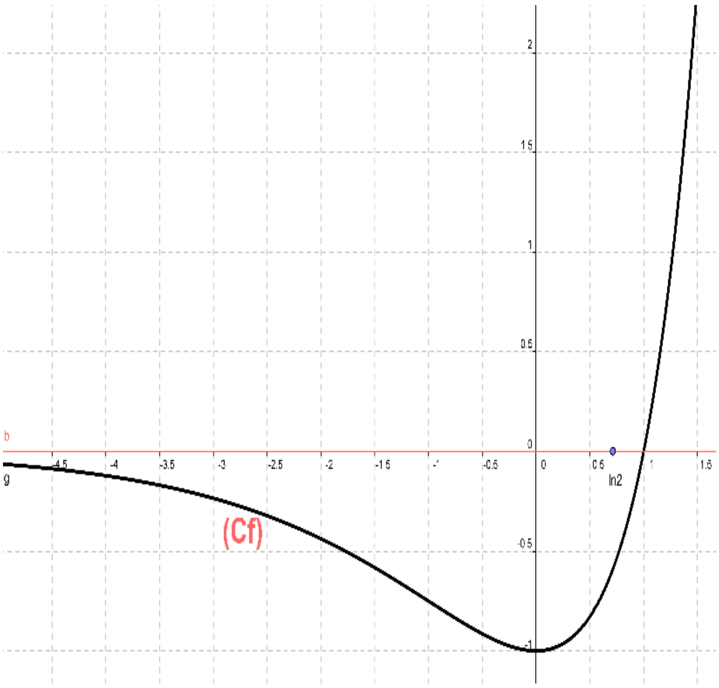
a)on a : $\lim\limits_{x\to-\infty} f\left(x\right)=0$ donc : $y=0$

est une asymptote a $\left(C\right)$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f\left(x\right)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{x\ln 2}}{x}\left(e^{x\ln 2}-2\right)=+\infty$

Car : $\lim\limits_{X\to+\infty}\frac{e^{X}}{X}=+\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty} e^{X}=+\infty$

Donc : la courbe Cf admet une branche parabolique dans la direction de l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$



Exercice 8: Soit La fonction f définie sur $\mathbb{R}^{+}$ par :

$f: \mathbb{R}^{+} \to \mathbb{R}$

$x \to x^{x}$, si $x \neq 0$ et $f\left(0\right)=0$

1)Etudier la continuité de la fonction f à droite de 0.

2)Etudier la dérivabilité de la fonction f à droite de 0.

3)Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

4)Déterminer la nature de la branche infinie de la courbe Cf au voisinage de $+\infty$.

5)Tracer la courbe Cf.

6)Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation $f(x) = x$

7)Soit la suite $\left(u_n\right)_n$ définie par : $u_0=\frac{1}{e}$

et $(\forall n \in \mathbb{N})(\ u_{n+1} = f\left(u_n\right))$.

a)Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})(\ u_n \leq 1)$

b)Etudier la monotonie de la suite $\left(u_n\right)_n$; puis en déduire qu'elle convergente.

c) Déterminer la limite de la suite $\left(u_n\right)_n$

« C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices Que l'on devient un mathématicien