ETUDE DES FONCTIONS

I) CONCAVITE ; CONVEXITE ; POINTS D'INFLEXION

1) Activités :

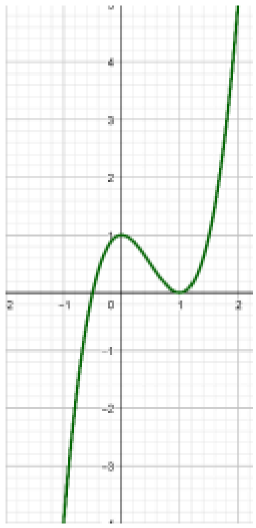
Activité 1 :

Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 + x$; Soit $A(a, f(a))$ un point de sa courbe représentative.

1. Déterminer l'équation de la tangente (T_A) en A. (En fonction de a)
2. Soit P et M deux points qui ont la même abscisse x et qui appartiennent respectivement à C_f et (T_A), Montrer que le signe de $\overline{PM}$ est positif quel que soit la valeur de x.
3. Déterminer la dérivée seconde de f.

Activité 2 :

Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 2x^3 - 3x^2$.



1. Déterminer les dérivées première et seconde de la fonction g.
2. Dresser le tableau de signe de $g''(x)$.
3. La courbe représentative de g est représentée ci-contre, étudier graphiquement La position relative de la courbe c_g par rapport à ses tangentes.
4. Que peut-on conclure ?

Activité 3 :

Soit la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

1. Déterminer le domaine de définition de h et étudier sa parité.
2. Etudier les limites en $+\infty$ et $-\infty$
3. Déterminer la fonction dérivée de la fonction h et dresser le T.V
4. Déterminer l'équation de la tangente T en $O(0,0)$
5. Etudier les positions relatives de T et la courbe C_f
6. Tracer la courbe C_f

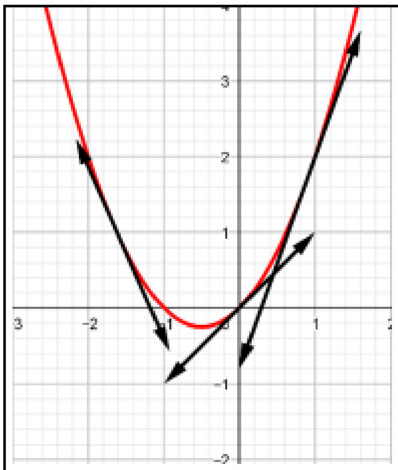
2) Définition et propriétés.

2.1 Définitions :

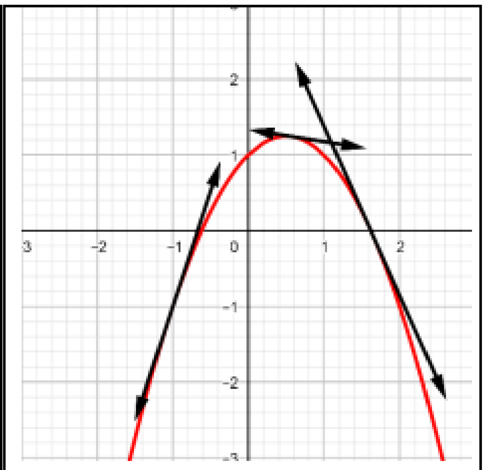
Définition :

Soit f une fonction dont la courbe représentative est C_f.

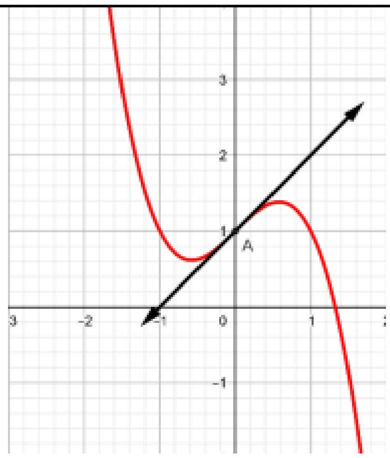
- On dit que la courbe est **convexe si elle se trouve au-dessus de toutes ses tangentes**
- On dit que la courbe est **concave si elle se trouve au-dessous de toutes ses tangentes.**
- **Un point d'inflexion** est un point où s'opère un changement de concavité de la courbe C_f



Graphe d'une fonction convexe



Graphe d'une fonction concave

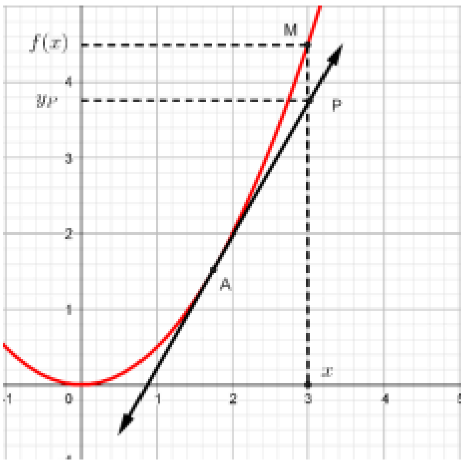


Point d'inflexion en A

Remarque :

Si f est dérivable en a et C_f traverse sa tangente en A alors le point A est un point d'inflexion

2.2 Dérivée seconde et concavité.



Soit f une fonction **deux fois dérivable** sur un intervalle I et C_f sa courbe représentative. Soient a un élément de I, $A(a, f(a))$ et (T_A) la tangente en A, Soient P et M deux points qui ont le même abscisse x

et qui appartiennent respectivement à C_f et (T_A),

On a : $y_P = f'(a)(x-a) + f(a)$. Soit :

$$\varphi(x) = \overline{PM} = f(x) - y_P$$
$$= f(x) - f'(a)(x-a) - f(a)$$

φ est dérivable sur I

$(\forall x \in I)(\varphi'(x) = f'(x) - f'(a))$ (car $\left(f(a)\right)' = 0$; $f(a)$ est une constante)

φ est deux fois dérivable sur I

$(\forall x \in I)\left(\varphi''(x) = f''(x)\right)$

Si $\boldsymbol{f''}$ **est positive** sur I, il en est de même pour φ'' et on aboutit au tableau suivant :

x	a
$\varphi''(x)$	$+$
$\varphi'(x)$	0
Signe de φ'	$-$ 0 $+$
$\varphi(x)$	0

On voit bien que si f est deux fois dérivable et que $f'' \geq 0$ sur I alors $\varphi(x) = \overline{PM} = f(x) - y_p$ est positif ce qui signifie que C_f est au-dessus de sa tangente en $A(a, f(a))$ et ceci pour tout a dans I d'où :

C_f est convexe sur I.

De même si on suppose que f'' est négative sur I on conclut que C_f est concave sur I.

Théorème :

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I .

- Si f'' est **positive** sur I alors C_f est **convexe** sur I.
- Si f'' est **négative** sur I alors C_f est **concave** sur I.
- Si f'' **s'annule en a en changeant de signe** alors C_f admet un point d'inflexion en $A(a, f(a))$

Remarque :

Les conditions du théorème précèdent sont suffisantes ; on peut avoir une courbe convexe, concave ou un point d'inflexion sans l'existence même de la dérivée seconde.

Exercice :

$$f(x) = \begin{cases} -x^2, & x < 0 \\ x^2, & x \geq 0 \end{cases}$$

1. Montrer que f est dérivable en 0.
2. Déterminer la fonction dérivée de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
3. Etudier la dérivabilité de f' en 0 ; f est-elle deux fois dérivable en 0.
4. Tracer la courbe C_f et remarquer qu'elle admet un point d'inflexion en $O(0,0)$.

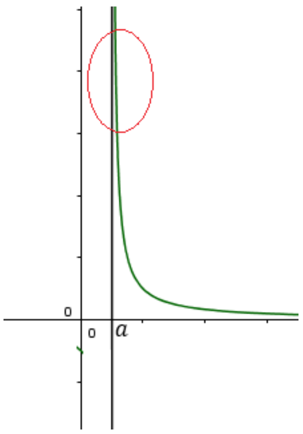
II) BRANCHES INFINIES.

1) Asymptote verticale (rappelle)

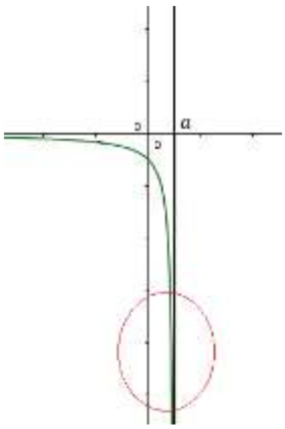
Définition :

Si la fonction f vérifie l'une des limites suivantes :
$\lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty$; $\lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty$; $\lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty$ ou $\lim_{x\to a^-} f(x) = +\infty$
Alors, on dit que la droite $(\Delta): x = a$ est une **asymptote verticale.**

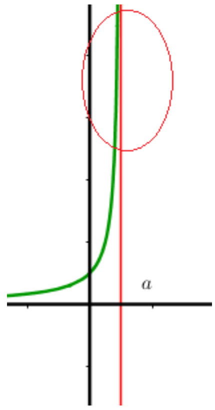
Interprétations géométriques :



$\lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty$



$\lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty$



$\lim_{x\to a^-} f(x) = +\infty$

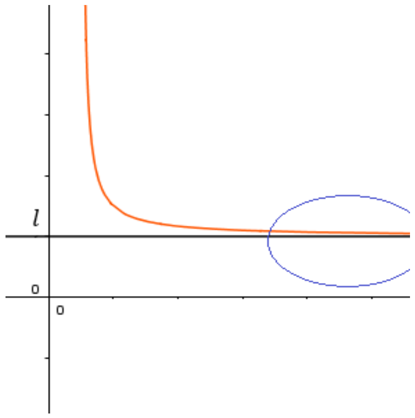
2) Asymptote horizontale.

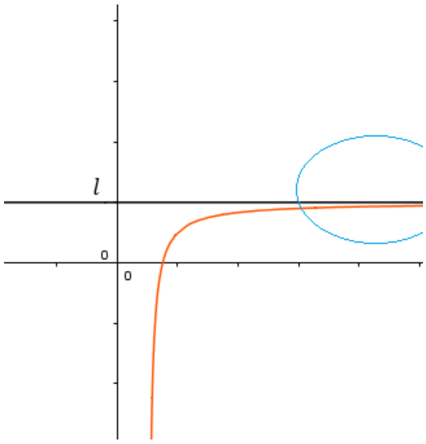
Définition :

Si la fonction f vérifie l'une des limites suivantes :
$\lim_{x\to +\infty} f(x) = l$ ou $\lim_{x\to -\infty} f(x) = l$
Alors, on dit que la droite $(\Delta): y = l$ est une **asymptote horizontale.**

Interprétation géométrique :

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$





Remarque :

La position de la courbe C_f par rapport à son asymptote horizontale se détermine par le signe de $f(x) - l$:

- Si $f(x) - l \geq 0$ alors C_f est au-dessus de $(\Delta): y = l$
- Si $f(x) - l \leq 0$ alors C_f est au-dessous de $(\Delta): y = l$

Exercice :

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{2x^2}{x^2-1}$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Déterminer les limites de f aux bornes de D_f.
3. Interpréter géométriquement les résultats obtenues.

3) Asymptote oblique.

Activité :

Soit g la fonction définie par : $g(x) = \frac{2x^2-x}{x-1}$

1. Déterminer l'ensemble de définition D_g.
2. Déterminer les limites aux bornes de D_g
3. Effectuer la division de $P(x) = 2x^2 - x$ sur $(x-1)$ puis en déduire que $(\forall x \in D_g)\left(g(x) = 2x + 1 + \frac{1}{x-1}\right)$
4. Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) - (2x+1)$

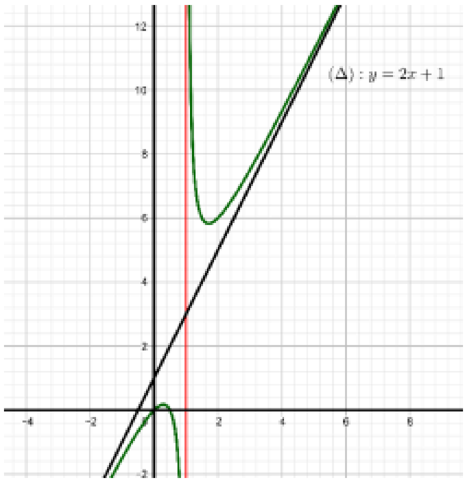
On dit que la droite $(\Delta): y = 2x + 1$ est une asymptote oblique à la courbe C_f au voisinage de $+\infty$

Définition :

Soit f une fonction définie au voisinage de $+\infty$, on dit que la droite $(\Delta): y = ax + b$ où $a \neq 0$ est une asymptote oblique à la courbe C_f au voisinage de $+\infty$ si : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - (ax+b) = 0$

Exemple :

La courbe de la fonction : $g(x) = \frac{2x^2-x}{x-1}$ a pour asymptote oblique au voisinage de $+\infty$, la droite $(\Delta): y = 2x + 1$.



Remarque :

Si la courbe C_f admet la droite $(\Delta): y = ax + b$ comme asymptote oblique alors la position de la courbe C_f se déduit par

le signe de $\overline{PM} = f(x) - (ax+b)$.

- Si $\overline{PM} = f(x) - (ax+b) > 0$ alors C_f est au-dessus de (Δ)
- Si $\overline{PM} = f(x) - (ax+b) < 0$ alors C_f est au-dessous de (Δ).
- Si $\overline{PM} = f(x) - (ax+b) = 0$ alors C_f est coupe (Δ).

Propriété :

Soit f une fonction définie au voisinage de $+\infty$. La courbe C_f admet la droite $(\Delta): y = ax + b$ $(a \neq 0)$ comme asymptote oblique au voisinage de $+\infty$ si et seulement s'il existe une fonction h tel que :

$$\begin{cases} f(x) = ax + b + h(x) \\ \lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = 0 \end{cases}$$

Preuve : Il suffit de poser : $h(x) = f(x) - (ax+b)$.

Exercice : En utilisant la division euclidienne montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}^*/\{1\}) \left(\frac{x^3+2x^2+2x}{x^2+x} = x + 1 + \frac{1}{x+1}\right)$

En déduire que la fonction $f(x) = \frac{x^3+2x^2+2x}{x^2+x}$ admet une asymptote oblique au voisinage de $+\infty$ et au voisinage de $-\infty$

Propriété :

Soit f une fonction définie au voisinage de $+\infty$. La droite $(\Delta): y = ax + b$ $(a \neq 0)$ est une asymptote oblique au voisinage de $+\infty$ si et seulement si :

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a \quad (a \neq 0) \\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - ax = b \end{cases}$$

Preuve :

D'après la propriété précédente : On peut écrire $f(x) = ax + b + h(x)$ où $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = 0$

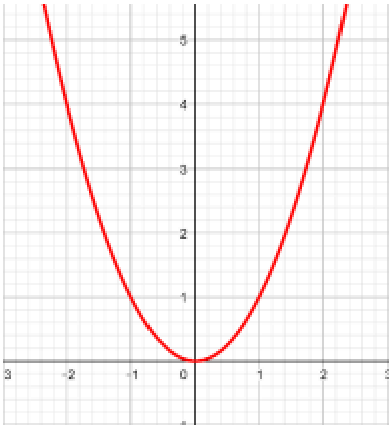
Donc : $\frac{f(x)}{x} = a + \frac{b}{x} + \frac{h(x)}{x}$ et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = a$ (car : $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{b}{x} + \frac{h(x)}{x}\right) = 0$)

D'autre part : $f(x) - ax = b + h(x)$ où $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - ax = b$

4) Branches paraboliques.

4.1) Vers l'axe (Oy)

Soit la fonction définie par : $f(x) = x^2$



On a : $D_f = \mathbb{R}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x} = +\infty$

On dit que **la courbe C_f admet une branche parabolique vers l'axe (Oy) au voisinage de $+\infty$**

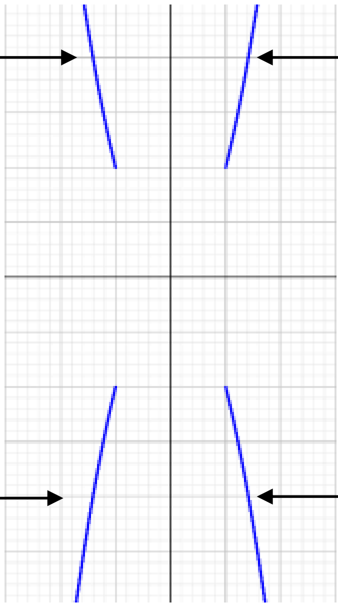
Définition :

Soit f une fonction définie au voisinage de $+\infty$; on dit que la courbe C_f admet une branche parabolique vers l'axe (Oy) au voisinage de $+\infty$ si $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty$.

Interprétations géométriques :

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = -\infty \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty \end{cases}$$



$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty \end{cases}$$

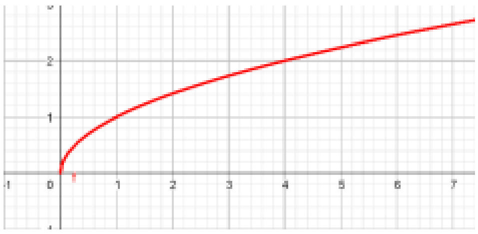
$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = -\infty \end{cases}$$

4.2) Vers l'axe $(\boldsymbol{Ox})$

Soit la fonction définie par : $f(x) = \sqrt{x}$

On a : $D_f = \mathbb{R}^+$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x}}{x} = 0$

On dit que **la courbe C_f admet une branche parabolique vers l'axe (Ox) au voisinage de $+\infty$**



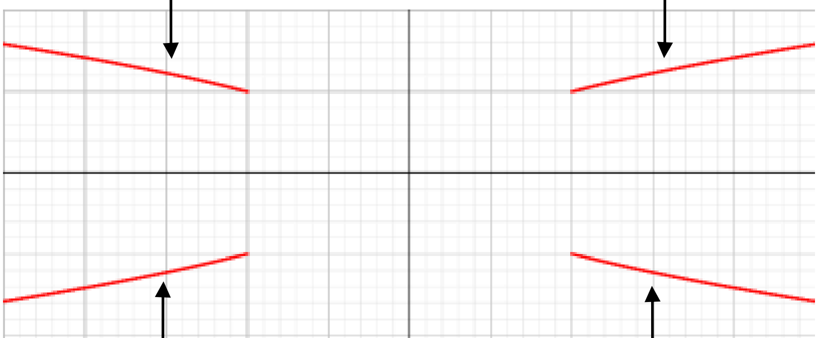
Définition :

Soit f une fonction définie au voisinage de $+\infty$; on dit que la courbe C_f admet une branche parabolique vers l'axe (Ox) au voisinage de $+\infty$ si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \pm\infty$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$.

Interprétations géométriques.

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0 \end{cases}$$

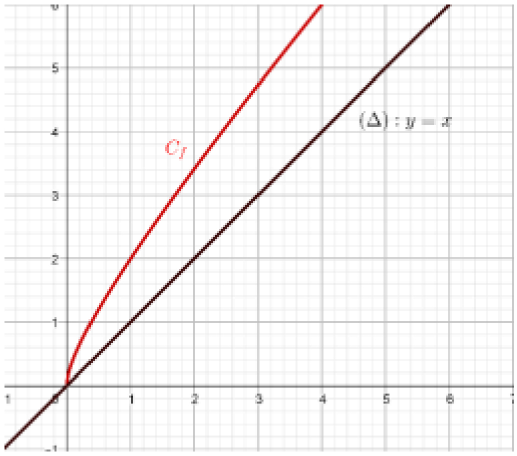


$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0 \end{cases}$$

4.3) Vers l'axe $(\Delta): y = ax$

Activité :



Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$par : $f(x) = x + \sqrt{x}$

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \quad \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x+\sqrt{x}}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} 1 + \frac{1}{\sqrt{x}} = 1$

Mais $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - x = \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$

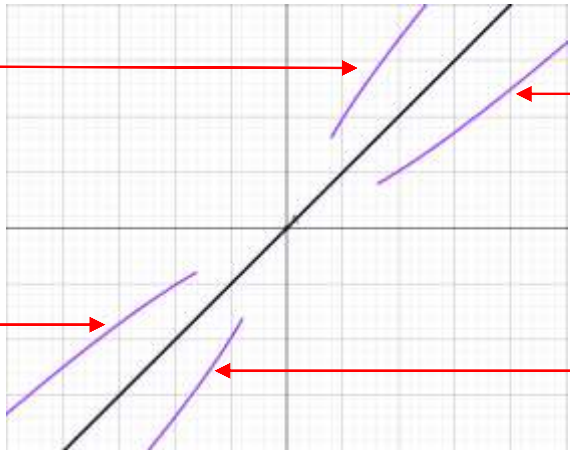
On dit que la courbe de la fonction **admet une branche parabolique vers la droite** $(\boldsymbol{\Delta}): \boldsymbol{y = x}$**.**

Définition :

Soit f une fonction définie au voisinage de $+\infty$; si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \pm\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = a \quad (a \neq 0)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - ax = \pm\infty$ alors on dit que : la courbe de la fonction **admet une branche parabolique vers la droite** $(\boldsymbol{\Delta}): \boldsymbol{y = ax}$**.**

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) - ax = +\infty \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) - ax = -\infty \end{cases}$$

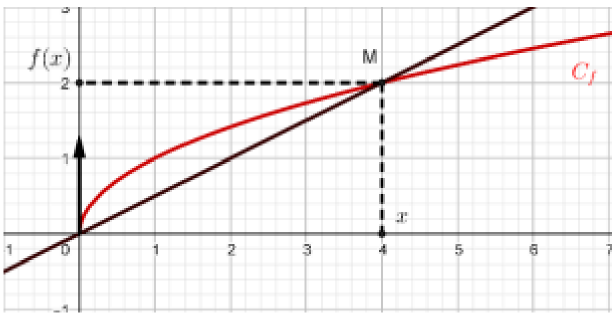


$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) - ax = +\infty \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) - ax = -\infty \end{cases}$$

III) DEMI-TANGENTE VERTICALE

Introduction :



Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $(\forall x \in \mathbb{R}^+)(f(x) = \sqrt{x})$

On a : $\lim\limits_{x\to0^+} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{0}}{x-0} = \lim\limits_{x\to0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$; la fonction f n'est pas dérivable à droite de 0.

Soient $x \neq 0$ et $M(x, f(x))$ un point de la courbe C_f la droite (OM) à pour coefficient directeur $m = \frac{\sqrt{x}}{x}$ donc elle a pour vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\sqrt{x}}{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{\sqrt{x}} \end{pmatrix}$ le vecteur $\vec{v}\begin{pmatrix} \sqrt{x} \\ 1 \end{pmatrix}$ est aussi vecteur directeur de la droite (OM) si on fait tendre x vers 0 (à droite) La droite (OM) "tend" pour une position limite vers une droite (T) de vecteur directeur $\vec{j}\binom{0}{1}$ donc

sera parallèle à l'axe (Oy).

Propriété :

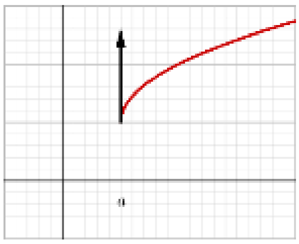
Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $[a, a + r[$
Si f **est continue** à droite de a et $\lim\limits_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \pm\infty$ alors la courbe C_f admet une demi-tangente verticale à droite de a.

Exercice :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x - E(x)$

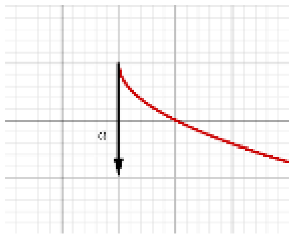
1. Tracer la courbe de la fonction f sur $[0,2[$.
2. Etudier la limite $\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$
3. Que remarquer vous ?.

Interprétation géométriques



$\lim\limits_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = +\infty$

$\lim\limits_{x\to a^-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = -\infty$



$\lim\limits_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = -\infty$

$\lim\limits_{x\to a^-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = +\infty$

IV) LES ELEMENTS DE SYMETRIE D'UNE COURBE.

1) Axe de symétrie :

Activité :

Soit la fonction $\begin{array}{l} f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ x\mapsto\sqrt{2x^2-4x-6}\end{array}$

1. Déterminer D_f ensemble de définition de la fonction f.
2. Montrer que $(\forall x \in D_f)(2 - x \in D_f)$
3. Montrer que $(\forall x \in D_f)(f(2 - x) = f(x))$

Propriété :

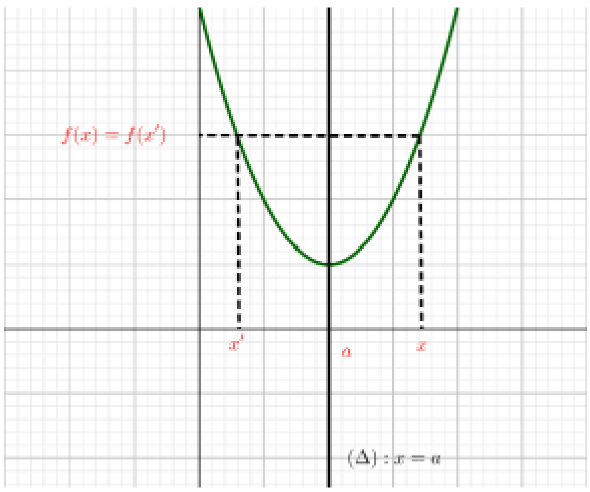
Soit f une fonction numérique dont l'ensemble de définition est D_f.
La droite $(\Delta): x = a$ est un axe de symétrie de la courbe C_f si et seulement si : $\begin{cases}(\forall x \in D_f)(2a - x \in D_f)\\(\forall x \in D_f)(f(2a - x) = f(x))\end{cases}$

Preuve :

Soit x un élément de D_f et $A(x, 0)$, si $A'(x', 0)$ est le symétrique de A par rapport à (Δ) $x = a$ alors $\frac{x+x'}{2} = a$ (a est le centre de l'intervalle de bornes x et ')

d'où : $x' = 2a - x$ et puisque $(\Delta) \perp (AA')$ alors

$f(x) = f(x')$ ce que signifie : $f(2a - x) = f(x)$



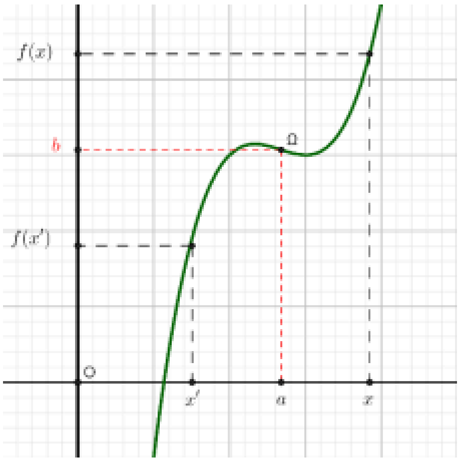
2) Centre de symétrie.

Propriété :

Soit f une fonction numérique dont l'ensemble de définition est D_f.

Le point $\Omega(a,b)$ est un centre de symétrie de la courbe C_f si et seulement si : $\begin{cases} (\forall x \in D_f)(2a - x \in D_f) \\ (\forall x \in D_f)(f(2a-x) = 2b - f(x)) \end{cases}$

Preuve :



$\Omega(a,b)$ étant centre de symétrie de la courbe C_f, si $M(x, f(x))$ est un point de C_f alors sont symétrique M' par rapport à Ω est un point de C_f. soit $M'(x', f'(x))$ on a : $\frac{x+x\prime}{2} = a$ et $\frac{f(x)+f(x')}{2} = b$

car a est le centre de l'intervalles de bornes x et x' et b est le centre de l'intervalles de bornes $f(x)$ et $f(x')$

Par suite : $x' = 2a - x$ et $f(x') = 2b - f(x)$ et finalement :

$f(2a - x) = 2b - f(x)$

Exercice :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

Montrer que le point d'inflexion de C_f est son centre de symétrie. (c'est valable uniquement pour ces fonctions)