Avec Exercices de rappels et d'applications et de réflexions avec solutions

L'ARITHMETIQUE

I) RAPPELS

1) Divisibilité dans $\mathbb{Z}$.

Définition :

Soient a et b deux entiers relatifs tels que $b \neq 0$; on dit que l'entier relatif b divise a s'il existe un entier relatif k

tel que $\boldsymbol{a = kb}$; on écrit : $\boldsymbol{b|a}$.

On dit que a est divisible par b ou a est un multiple de b

Exemples : $3/12$ car $12 = 3\times 4$ et $-6/42$

car $-42 = 7\times(-6)$ et on a :7 ne divise pas 16

Définition :

1) Si $b|m$ et $b|n$ on dit que b est un diviseur commun de m et n

2) Si $b|m$ et $b'|m$, on dit que m est un multiple commun de b et b'

Exercice1 : 1) Déterminer et dénombrer les diviseurs naturels de 156

12)Déterminer dans $\mathbb{Z}$ tous les diviseurs de -8

Solution :1) 156 a 12 diviseurs :

1; 2; 3; 4; 6; 12; 13; 26; 39; 52; 78 et 156.

156 et 1 sont appelés diviseurs triviaux, les autres sont des diviseurs stricts.

2) $D_{-8} = \{-8, -4, -2, -1, 1, 2, 4, 8\}$

Propriétés : $a\in\mathbb{Z}$; $b\in\mathbb{Z}$; $c\in\mathbb{Z}$

- $1/a$; $-1/a$ et a/a et $a/-a$
- $b|a \Rightarrow |b| \leq |a|$
- $a/b \Rightarrow a/b\times c$
- $a/b \Rightarrow |a| \leq |b|$
- $b|1 \Rightarrow b \in \{-1,1\}$
- $a|b$ et $b|a \Rightarrow |a| = |b|$
- $a|b$ et $c|d \Rightarrow ac|bd$
- $a|b$ et $b|c \Rightarrow a|c$
- $a|b \Rightarrow a|\ b\ c$
- $a|b$ et $b|c \Rightarrow a|c$
- $a|b \Rightarrow a|\ b\ c$
- $a|m$ et $a|n \Rightarrow a|m + n$
- $a|m$ et $a|n \Rightarrow a|m - n$
- $a|m$ et $a|n \Rightarrow a|\alpha m + \beta n$ où α et β sont des entiers relatifs quelconques.
- $a/b \Rightarrow a^n/b^n \quad n\in\mathbb{N}$

Exercice2 : 1) $a\in\mathbb{Z}$ et $b\in\mathbb{Z}$ et $c\in\mathbb{Z}$ et $x\in\mathbb{Z}$ et $y\in\mathbb{Z}$

a) montrer que si $a/2b+c$ et $a/b+c$ alors a/c

b) montrer que si $a/2b+3c$ et $a/b+c$ alors a/c

c) montrer que si $a/x-y$ et $a/b-c$ alors $a/xb-cy$

2) $a\in\mathbb{Z}$ et $n\in\mathbb{N}$ et $a/12n+1$ et $a/-2n+3$

Montrer que $a/19$

3) $d\in\mathbb{Z}$ et $a\in\mathbb{Z}$ et d/n^2+3 et $d/2n-1$

Montrer que $d/13$

Solution : 1) a) $\begin{cases} a/2b+c \\ a/b+c \end{cases} \Rightarrow a/2(b+c)-(2b+c) \Rightarrow a/c$

1) b) $\begin{cases} a/2b+3c \\ a/b+c \end{cases} \Rightarrow a/2b+3c-2(b+c) \Rightarrow a/c$

1) c) $\begin{cases} a/x-y \\ a/b-c \end{cases} \Rightarrow a/bx-by \text{ et } a/by-cy \Rightarrow a/bx-cy$

2) $a/12n+1$ et $a/-2n+3$

$\Rightarrow a/12n+1 \text{ et } a/-12n+18 \Rightarrow a/19$

$\Rightarrow a\in\{\pm1;\pm19\}$

3) $d\in\mathbb{Z}$ et $a\in\mathbb{Z}$ et d/n^2+3 et $d/2n-1$

$\Rightarrow d/n^2+3 \text{ et } a/(2n-1)^2 \Rightarrow d/4n^2+12 \text{ et } d/4n^2-4n+1$

$\Rightarrow d/11+4n \text{ et } d/-2+4n \Rightarrow d/13$

Exercice3 : Quelles sont les valeurs de l'entier relatif n pour lesquelles la fraction $\frac{3n+8}{n+4}$

Représente un entier relatif ?

Solution : Cette fraction a un sens si : $n+4\neq 0$ soit $n\neq -4$

On constate que $3n+8 = 3(n+4)-4$

$n+4$ divise $3(n+4)$, donc $n+4$ divise $3n+8$ si $n+4$ divise -4.

Les diviseurs de -4 sont 1 ; -1 ; 2 ; -2 ; 4 ; -4.

Il faut que $n+4\in\{-4;-2;-1;1;2;4\}$ ce qui entraine que $n\in\{-8;-6;-5;-3;-2;0\}$

On vérifie que -4 n'appartient pas à -8 ; -6 ; -5

; -3 ; -2 ; 0 avant de conclure.

Conclusion : la fraction $\frac{3n+8}{n+4}$ représente un entier relatif pour les valeurs de l'entier relatif n : -8 ; -6 ;-5 ; -3 ; -2 ; 0.

Exercice4 : Résoudre dans $\mathbb{N}^2$ les équations suivantes :a) $x^2 - y^2 = 32$ avec $x \succ y$

b) $2xy + 2x + y = 99$

Solution :a) $x^2 - y^2 = 32 \Leftrightarrow (x-y)(x+y) = 32$

$x-y$ et $x+y$ sont des diviseurs positif de 32

Et $(x-y)+(x+y) = 2x$ est u nombre pair

Donc $x-y$ et $x+y$ ont la même parité $32 = 2^5$

On dresse un tableau :

$x-y$	2	4
$x+y$	16	8
x	9	6
y	7	2

$S = \{(6;2);(9;7)\}$

b) $2xy + 2x + y = 99 \Leftrightarrow 2xy + y + 2x + 1 - 1 = 99$

$\Leftrightarrow y(2x+1) + 2x + 1 = 99 + 1 \Leftrightarrow (2x+1)(y+1) = 100$

Donc : $2x+1$ et $y+1$ sont des diviseurs positif de 100

$D_{100} = \{1;2;4;5;10;20;25;50;100\}$

$2x+1$	1	2	4	5	20	25	50	100
$y+1$	100	50	25	20	5	4	2	1
x	0			2		12		
y	99			10		3		

$S = \{(0;99);(2;19);(12;3)\}$

2) La division euclidienne dans $\mathbb{Z}$

Propriété : Considérons a et b deux entiers relatifs tels que $b \neq 0$; ils existent un entiers relatif q et un entier naturel r

Tels que : $a = bq + r$ où $0 \leq r < |b|$

- L'entier a s'appelle : ***Le divisé***
- L'entier b s'appelle : ***Le diviseur***
- L'entier q s'appelle : ***Le quotient***
- L'entier r s'appelle : ***Le reste***

Exemple :1)la division euclidienne de 37 par -11 donne : $37 = (-11)\times(-3) + 4$ car $0 \leq 4 < 11$

2)a division euclidienne de -37 par 11 donne : $-37 = 11\times(-4) + 7$ car $0 \leq 7 < 11$

3) l a division euclidienne de -37 par -11 donne : $-37 = (-11)\times 4 + 7$ car $0 \leq 7 < 11$

Remarque : Si r est le reste de la division euclidienne par b alors : $r \in \{0, 1, \dots, b-1\}$.

Exercice5 :déterminer le nombre entier naturel n Tel que le quotient de la division euclidienne de n par 25 est p et le reste est p^2 $(p \in \mathbb{N})$

Solution: $n \in \mathbb{N}$: $n = 25p + p^2$ et $0 \leq p^2 \prec 25$

donc $0 \leq p \prec 5$

Donc : $\begin{cases} p=0 \\ n=0 \end{cases} ou \begin{cases} p=1 \\ n=26 \end{cases} ou \begin{cases} p=2 \\ n=54 \end{cases} ou \begin{cases} p=3 \\ n=84 \end{cases} ou \begin{cases} p=4 \\ n=116 \end{cases}$

Donc : $n \in \{0;26;54;84;116\}$

Exercice6: $b \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{Z}$

si q est le quotient de la division euclidienne de $a-1$ par b déterminer le quotient de la division euclidienne de $ab^9 - 1$ par b^{10}

Solution : soit r le reste de la division euclidienne de $a-1$ par b donc :

$a - 1 = bq + r$ et $0 \leq r \prec b$

Donc : $ab^9 - b^9 = b^{10}q + rb^9$

Donc : $ab^9 - 1 = b^{10}q + rb^9 + b^9 - 1$

Donc : $ab^9 - 1 = b^{10}q + (r+1)b^9 - 1$

On montre que : $0 \leq (r+1)b^9 - 1 \prec b^{10}$???

On a : $0 \leq r \prec b$ donc $0 \leq r+1 \leq b$

donc $0 \leq (r+1)b^9 \leq b^{10}$ donc $0 \leq (r+1)b^9 - 1 \leq b^{10} - 1$

donc $0 \leq (r+1)b^9 - 1 \prec b^{10}$

conclusion : q est aussi le quotient de la division euclidienne de $ab^9 - 1$ par b^{10}

b) L'inverse est-il vrai ?

3) Les nombres premiers

Définitions : a) On dit que l'entier d est un diviseur **effectif** de l'entier relatif a

Si $d|a$ et $|d| \neq 1$ et $|d| \neq |a|$

b) On dit qu'un entier relatif non nul p est **premier** s'il est différent de 1 et s'il n'admet pas de diviseurs effectifs.

Remarques :

- Un nombre premier p admet exactement deux diviseurs positifs 1 et |p|.
- Si p est un nombre premier positif alors p n'admet pas de diviseurs effectifs de même
  - p n'admet pas de diviseurs effectif d'où :
  - -p est aussi premier ;
- Pour l'étude des nombres premiers on se contente d'étudier les nombres premiers positifs.

Propriété : Soit a un entier naturel non nul différent de 1 et non premier, le plus petit diviseur de a diffèrent de 1 est un nombre premier

Exemple1 : Les nombres -3 et -7 et 23 sont premiers.

Propriété : Soit n un entier naturel non nul, diffèrent de 1 et non premier, il existe un nombre premier p qui divise l'entier n et qui vérifie $p^2 \le n$.

Remarque : Cette propriété nous permet de déterminer si un nombre est premier ou non.

Corolaire : Si un entier n n'est divisible par aucun entier premier p et qui vérifie $p^2 \le n$ alors n est premier.

Exercice7: 1) Les nombres suivants sont–ils premiers :499 ; 601 ; 703 ; 2003 ; $2n^2+3n \quad n\in\mathbb{N}$

Crible d'Eratosthène. Les nombres premiers inferieurs à 100

1	**2**	**3**	4	**5**	6	**7**	8	9	10
11	12	**13**	14	15	16	**17**	18	**19**	20
21	22	**23**	24	25	26	27	28	**29**	30
31	32	33	34	35	36	**37**	38	39	40
41	42	**43**	44	45	46	**47**	48	49	50
51	52	**53**	54	55	56	57	58	**59**	60
61	62	63	64	65	66	**67**	68	69	70
71	72	**73**	74	75	76	77	78	**79**	80
81	82	**83**	84	85	86	87	88	**89**	90
91	92	93	94	95	96	**97**	98	99	100

Théorème : L'ensemble des nombres premiers est infini.

Exercice 8 :a) Montrer que tout nombre premier s'écrit de la forme p=6n+1 ou p = 6n + 5

4) Plus grand diviseurs commun

4.1 Définition et propriété

Définition : On dit que le nombre d est le plus grand diviseur commun de deux entiers relatifs a et b lorsque d divise a et d divise b et qu'il n'y a pas d'autre plus grands diviseurs de ces deux nombres.

On note $d = PGDC\ (a, b) = a \wedge b$

Exemple :

$-48 \wedge 36 = 12$

Propriétés :1) $a \wedge a = |a|$ 2) $1 \wedge a = 1$

3) $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$

4) Si $b|a$ alors $a \wedge b = |b|$

5)si $d|a$ et $d|b$ alors $d|\ (a \wedge b)$

6) $a \wedge b = a \wedge (a - b)$

Exercice9 : montrer que $\forall a\in\mathbb{Z}\quad a\wedge(a+1)=1$

Solution : on pose $d=a\wedge(a+1)$

$\Rightarrow d/a$ et $d/a+1 \Rightarrow d/1 \Rightarrow d=1$

Exercice10 : $n\in\mathbb{N}$ On considère les deux nombres : $A=n^2+3$ et $B=n+2$

1) montrer que $A\wedge B=(n+2)\wedge 7$

2) déterminer l'entier naturel n tel que : $\dfrac{n^2+3}{n+2}\in\mathbb{N}$

Solution :1)on pose $d=A\wedge B$ et $d'=(n+2)\wedge 7$

On a : $d=A\wedge B$

$\Rightarrow d/A$ et $d/B \Rightarrow d/n^2+3$ et $d/n+2$

$\Rightarrow d/n^2+3$ et $d/n+2$ on utilisant la division euclidienne : on trouve : $n^2+3=(n+2)(n-2)+7$

$n^2+3-(n+2)(n-2)=7$

$\Rightarrow d/n^2+3-(n+2)(n-2)$

$\Rightarrow d/7$ et $d/n+2 \Rightarrow d/(n+2)\wedge 7 \Rightarrow d/d'$

Inversement : On a : $d'=(n+2)\wedge 7$

$\Rightarrow d'/n+2$ et $d'/7 \Rightarrow d'/(n+2)(n-2)$ et $d'/7$

$\Rightarrow d'/(n+2)(n-2)+7$ et $d'/7 \Rightarrow d'/n^2+3$ et $d'/7$

donc : $d'/A\wedge B$ donc d'/d

donc d/d' et d'/d et $d\in\mathbb{N}$ et $d'\in\mathbb{N}$ donc

donc $d=d'$ donc : $A\wedge B=(n+2)\wedge 7$

2) $\dfrac{n^2+3}{n+2}\in\mathbb{N} \Leftrightarrow n+2/n^2+3$ et et on a : $n+2/n+2$

Donc : $n+2/A\wedge B$ Donc : $n+2/(n+2)\wedge 7$

Donc : $n+2/7$ or 7 est premier donc :

Il faut que $n+2\in\{1;7\}$ ce qui entraine que $n=5$

Définition : On dit que deux entier relatifs a et b sont premiers entre eux si $a \wedge b = 1$.

Exemple :21 et 10 sont premiers entre eux.

Exercice 11: $a\in\mathbb{Z}$ et $b\in\mathbb{Z}$ et $c\in\mathbb{Z}$ et $d\in\mathbb{Z}$ tels que : $a=bc+d$

1) montrer que $a\wedge b=b\wedge d$

2) En déduire que : $a\wedge b=b\wedge(a-bc)$

Solution :1)on pose $\Delta_1=a\wedge b$ et $\Delta_2=b\wedge d$

On a : Δ_1/a et Δ_1/b donc Δ_1/a et Δ_1/bc donc $\Delta_1/a-bc$ donc Δ_1/d

donc Δ_1/d et Δ_1/b donc $\Delta_1/b\wedge d$ donc Δ_1/Δ_2

inversement On a : Δ_2/b et Δ_2/d donc Δ_2/d et Δ_2/bc donc $\Delta_2/bc+d$ donc Δ_2/a

donc Δ_2/a et Δ_2/b donc $\Delta_2/a\wedge b$ donc Δ_2/Δ_1

On a donc : Δ_1/Δ_2 et Δ_2/Δ_1 et $\Delta_1\in\mathbb{N}$ et $\Delta_2\in\mathbb{N}$

donc $\Delta_1=\Delta_2$

donc : $a \wedge b = b \wedge d$

2)on a : $a = bc + (a - bc)$ si on prend : $d = a - bc$ et d'après 1) on aura : $a \wedge b = b \wedge d = b \wedge (a - bc)$

Exercice12 : $a \in \mathbb{N}$ On considère les deux nombres : $A = 35a + 57$ et $B = 45a + 76$

montrer que $A \wedge B = 1$ ou $A \wedge B = 19$

Solution :1)on pose $d = A \wedge B$

$\Rightarrow d / A$ et $d / B \Rightarrow d / 35a + 57$ et $d / 45a + 76$

$\Rightarrow d / 9(35a + 57)$ et $d / 7(45a + 76)$

$\Rightarrow d / 315a + 513$ et $d / 315a + 532$

$\Rightarrow d / 19$ or 19 est premier donc :

Il faut que $d \in \{1;19\}$ ce qui entraine que :

$A \wedge B = 1$ ou $A \wedge B = 19$

4.2 L'algorithme d'Euclide.

Théorème : Soit a un entier naturel et b un entier naturel non nul on a : $a = bq + r$

Où $0 \le r < b$ on a : $a \wedge b = b \wedge r$

L'algorithme d'Euclide.

Soient a et b deux entiers naturels ($b \neq 0$) on a :

$a = bq_1 + r_1$ si $r_1 \neq 0$ alors : $b = r_1q_2 + r_2$

si $r_2 \neq 0$ alors :$r_1 = r_2q_3 + r_3$

si $r_3 \neq 0$ alors :

....

$r_{n-2} = r_{n-1}q_n + r_n$

si $r_n \neq 0$ alors :$r_{n-1} = r_nq_{n+1} + r_{n+1}$

si $r_{n+1} = 0$ on arrête le processus.

Et d'après la propriété précédente :

$a \wedge b = b \wedge r_1 = r_1 \wedge r_2 = \cdots = r_{n-1} \wedge r_n = r_n$ car : $r_n | r_{n-1}$

Propriété : Soient a et b deux entier naturels non nuls. Le plus grand diviseur commun de a et b est le dernier reste non nul dans les divisions euclidiennes successives.

Application :

1)En utilisant l'algorithme d'Euclide calculer : $67 \wedge 39$

2) en déduire deux nombres relatifs u et v tel que : $39u + 67v = 1$

Solution:1)

(1) $67 = 1 \times 39 + \boxed{28}$ **(2)** $39 = 1 \times 28 + \boxed{11}$

(3) $28 = 2 \times 11 + \boxed{6}$ **(4)** $11 = 1 \times 6 + \boxed{5}$

(5) $6 = 1 \times 5 + \boxed{1}$ **(6)** $5 = 1 \times 5 + \boxed{0}$

Donc : $67 \wedge 39 = 1$ c'est le dernier reste non nul dans l'algorithme d'Euclide

2) **(5)** $6 = 1 \times 5 + \boxed{1} \Rightarrow 6 - 1 \times 5 = \boxed{1}$

$\Rightarrow 6 - 1 \times (11 - 1 \times 6) = \boxed{1} \Rightarrow 2 \times 6 - 1 \times 11 = \boxed{1}$

$\Rightarrow 2 \times (28 - 2 \times 11) - 1 \times 11 = \boxed{1} \Rightarrow 2 \times 28 - 5 \times 11 = \boxed{1}$

$\Rightarrow 2 \times 28 - 5 \times (39 - 1 \times 28) = \boxed{1} \Rightarrow 7 \times 28 - 5 \times 39 = \boxed{1}$

$\Rightarrow 7 \times (67 - 1 \times 39) - 5 \times 39 = \boxed{1} \Rightarrow \boxed{7 \times 67 - 12 \times 39 = 1}$

Exercice 13:

1- Trouver le $PGDC$ (362154, 82350).

2- Déterminer tous les diviseurs communs de 362154 et 82350.

Propriété : Soient a et b deux entier relatifs non nuls. Les diviseurs communs de a et b sont les diviseurs de $a \wedge b$.

On peut dire que : $D_a \cap D_b = D_{a \wedge b}$

Exercice14 : Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on a :

1) $n \wedge (n+1) = 1$ 2) $n \wedge (2n+1) = 1$

3) $(2n+1) \wedge (3n+1) = 1$

5) Le plus petit multiple commun.

Définition : On dit que le nombre entier naturel m est **le plus petit multiple commun** de deux entiers relatifs a et b lorsque

m est un multiple de a et de b et qu'il n'y a pas d'autre plus petit multiple non nuls de ces deux nombres. On note : $m = PPCM\ (a, b) = a \vee b$

Exemple : $-48 \wedge 36 = 144$

Propriétés :

1) $a \vee a = |a|$ 2) $a \vee b = b \vee a$

3) $a \vee 1 = |a|$ 4) Si $b|a$ alors $a \vee b = |a|$

5) $a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$

6) $a|(a \vee b)$; $b|(a \vee b)$ et $(a \vee b)|ab$

Propriété : Considérons a et b deux entiers relatifs.

Si $a \vee b = m$ et M un multiple commun de a et b alors $m|M$.

Indications pour preuve :

Poser $M = qm + r$ on a : $a|m$, $a|M$ conclure.

De même pour b et si $r \neq 0$ aboutir à une contradiction.

6) LA CONGRUENCE MODULO n

6.1) Définition et propriétés.

Définition : Soient a et b deux entiers relatifs ; et n un entier naturel non nul. On dit que : $\boldsymbol{a}$ est congrue à $\boldsymbol{b}$ modulo $\boldsymbol{n}$ si $n|(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a})$.

On écrit : $\boldsymbol{a \equiv b\ [n]}$

Exemples :$122 \equiv 27\ [5]$ $34 \equiv 13\ [7]$

Propriété : Si $a \equiv b\ [n]$ alors a et b ont le même reste dans la division euclidienne par n

Propriété fondamentale :

1) $(\forall a \in \mathbb{Z})(a \equiv a\ [n])$ on dit que la relation de congruence est réflexive.

2) $(\forall (a, b) \in \mathbb{Z}^2)(\ a \equiv b\ [n] \Leftrightarrow b \equiv a\ [n]\ )$: on dit que la relation de congruence est symétrique.

3) $(\forall (a, b, c) \in \mathbb{Z}^3)$

($a \equiv b$ $[n]$ et $b \equiv c$ $[n] \Rightarrow a \equiv c$ $[n]$) : on dit que la relation de congruence est transitive.

Définition : Puisque la relation est de congruence est réflexive, symétrique et transitive on dit que la relation de congruence est une relation d'équivalence

6.2) Compatibilité de la relation d'équivalence avec l'addition et la multiplication dans $\mathbb{Z}$

Propriété et définition : Soit n un entier naturel non nul. Si $a \equiv b$ $[n]$ et $c \equiv d$ $[n]$ alors :

1) $a + c \equiv b + d$ $[n]$; On dit que la relation de congruence est compatible avec l'addition dans $\mathbb{Z}$

2) $ac \equiv bd$ $[n]$; On dit que la relation de congruence est compatible avec la multiplication dans $\mathbb{Z}$

Corolaire : Si $a \equiv b$ $[n]$ alors pour tout k dans $\mathbb{N}$ on a : $a^k \equiv b^k [n]$

Remarque : La réciproque du corolaire n'est pas vraie : $2^4 \equiv 3^4 [5]$ mais $2 \not\equiv 3$ $[5]$

Exercice15: $a \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{N}$ Si 17 est le reste de la division euclidienne de a par 19

Et Si 15 est le reste de la division euclidienne de b par 19 Déterminer le reste de la division euclidienne des nombres suivants par 19 :

1) $a+b$ 2) a^2+b^2 3) $2a-5b$

Solution : 1)On a : $a \equiv 17[19]$ et $b \equiv 15[19]$

donc : $a+b \equiv 17+15[19] \Leftrightarrow a+b \equiv 13[19]$

Par suite : le reste dans la division du nombre $a+b$ Par 19 est : 13

2) $a \equiv 17[19] \Rightarrow a^2 \equiv 17^2[19] \Rightarrow a^2 \equiv 4[19]$

$b \equiv 15[19] \Rightarrow b^2 \equiv 15^2[19] \Rightarrow b^2 \equiv 16[19]$

Donc : $a^2+b^2 \equiv 4+16[19] \Leftrightarrow a^2+b^2 \equiv 1[19]$

Par suite : le reste dans la division du nombre a^2+b^2 Par 19 est : 1

3) $a \equiv 17[19] \Rightarrow 2a \equiv 2\times 17[19] \Rightarrow 2a \equiv 15[19]$ **(1)**

$b \equiv 15[19] \Rightarrow 5b \equiv 5\times 15[19] \Rightarrow 5b \equiv 18[19]$

Donc : $5b \equiv -1[19] \Rightarrow -5b \equiv 1[19]$ **(2)**

De **(1) et (2)** on déduit que :

$2a-5b \equiv 15+1[19] \Rightarrow 2a-5b \equiv 16[19]$

Par suite : le reste dans la division du nombre $2a-5b$ Par 19 est : 16

Exercice16 : 1)Déterminer et discuter suivants les valeurs de l'entier naturel n le reste de la division par 10 du nombres 3^n

2)en déduire le chiffre des unités du nombres 2019^{2020}

3)Déterminer les valeurs de l'entier naturel n tél que : $3^n+5n+2 \equiv 0[10]$

Solution :1) $3^n \equiv r[10]$ et $r \in \{0;1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$

On a : $3^0 \equiv 1[10]$ et $3^1 \equiv 3[10]$ et $3^2 \equiv 9[10]$

et $3^3 \equiv 7[10]$ et $3^4 \equiv 1[10]$

Si $n \in \mathbb{N}$ alors : $n = 4k+r$ avec $r \in \{0;1;2;3\}$

On a : $3^4 \equiv 1[10]$ donc : $\left(3^4\right)^k \equiv 1^k[10]$

donc : $3^{4k} \equiv 1[10]$ et $3^{4k+1} \equiv 3[10]$ et $3^{4k+2} \equiv 9[7]$

et $3^{4k+3} \equiv 7[10]$

2) le chiffre des unités du nombres 2019^{2020} est le reste dans la division du nombre 2019^{2020} Par 10

cad : on cherche r tel que : $2019^{2020} \equiv r[10]$??

On a : $2019 = 2010+9$ donc : $2019 \equiv 9[10]$

donc : $2019^{2020} \equiv 9^{2020}[10]$ donc : $2019^{2020} \equiv 3^{4040}[10]$

or : $4040 = 4\times 1010 = 4\times k$

donc : $2019^{2020} \equiv 3^{4k}[10]$ donc : $2019^{2020} \equiv 1[10]$

le chiffre des unités du nombres 2019^{2020} est 1

Autre méthode **:** $2019 \equiv 9[10]$

donc : $2019 \equiv -1[10]$ donc : $2019^{2020} \equiv 1[10]$

3)On Dresse une table comme suite :

n	$4k$	$4k+1$	$4k+2$	$4k+3$
3^n	$\equiv 1[10]$	$\equiv 3[10]$	$\equiv 9[10]$	$\equiv 7[10]$
$5n$	$\equiv 0[10]$	$\equiv 5[10]$	$\equiv 0[10]$	$\equiv 5[10]$
3^n+5n+2	$\equiv 3[10]$	$\equiv 0[10]$	$\equiv 1[10]$	$\equiv 4[10]$

donc : $3^n+5n+2 \equiv 0[10] \Leftrightarrow n = 3k+1$ avec $k \in \mathbb{N}$

Exercice17 : 1)montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$(n+2)^{n+2} - 2^{n+2}(n+1) \equiv 0[n^2]$

2) montrer que: $7^{7^{7^{7^{7^{7^{7}}}}}} \equiv 3[10]$

Solution :1)on a : $(n+2)^{n+2} = \sum_{k=0}^{n+2} C_{n+2}^k n^k 2^{n+2-k}$ Donc :

$$(n+2)^{n+2} = C_{n+2}^0 n^0 2^{n+2} + C_{n+2}^1 n 2^{n+1} + \sum_{k=2}^{n+2} C_{n+2}^k n^k 2^{n+2-k}$$

$$(n+2)^{n+2} = 2^{n+2} + (n+2) n 2^{n+1} + \sum_{k=2}^{n+2} C_{n+2}^k n^k 2^{n+2-k}$$

Donc : $(n+2)^{n+2} = 2^{n+1}\left(2+n^2+2n\right) + n^2 \sum_{k=2}^{n+2} C_{n+2}^k n^k 2^{n-k}$

$$(n+2)^{n+2} = 2^{n+1}(2+2n) + 2^{n+1}n^2 + n^2 \sum_{k=2}^{n+2} C_{n+2}^k n^k 2^{n-k}$$

$$(n+2)^{n+2} - 2^{n+2}(1+n) = n^2\left(2^{n+1} + \sum_{k=2}^{n+2} C_{n+2}^k n^k 2^{n-k}\right)$$

on a : $n^2\left(2^{n+1}+\sum_{k=2}^{n+2}C_{n+2}^{k}n^k2^{n-k}\right)\equiv 0[n^2]$

donc : $(n+2)^{n+2}-2^{n+2}(n+1)\equiv 0[n^2]$

2) on a : $7\equiv 7[10]$ et $7^2\equiv -1[10]$ donc $7^4\equiv 1[10]$

Donc : $7^{4k}\equiv 1[10]$ et $7^{4k+1}\equiv 7[10]$ et $7^{4k+2}\equiv 9[10]$ $7^{4k+3}\equiv 3[10]$

On aussi : $7\equiv 3[4]$ et $7^2\equiv 1[4]$

Donc $7^{2k}\equiv 1[4]$ et $7^{2k+1}\equiv 3[4]$

Or : $7^{7^{7^{7^{7^{7}}}}}\equiv 1[2]$ (car impair)

Donc : $7^{7^{7^{7^{7^{7^{7}}}}}}\equiv 3[10]$

Exercice 18 : 1) Déterminer le reste de la division euclidienne de 45872^{2018} par 9

2) Déterminer le reste de la division euclidienne de 25614^{6512} par 13

3) Montrer que pour tout n entier naturel : $3^{2n+1}+2^{n+2}$ est divisible par 7

4) Montrer que pour tout n entier naturel, $5n^3+n$ est divisible par 6

5) Montrer que si n n'est pas un multiple de 7, alors : n^6-1 est un multiple de 7

6 Montrer que pour tout entier naturel, le nombre $n(n^2+5)$ est divisible par 6

Exercice19 : $x\in\mathbb{N}^*$ et $y\in\mathbb{N}^*$ On considère les deux nombres : $a=9x+4y$ et $b=2x+y$

1)montrer que $x\wedge y=a\wedge b$

2) $n\in\mathbb{N}$ on pose : $a=n^2+5n+13$ et $b=n+3$

a)montrer que $a\wedge b=b\wedge 7$

b)en déduire les valeurs possibles $a\wedge b=d$

c)montrer que : $n\equiv 4[7]\Leftrightarrow a\wedge b=7$

d)en déduire les valeurs de $n\in\mathbb{N}$ tel que : $a\wedge b=1$

Solution :1)on pose $d=x\wedge y$ et $d'=a\wedge b$

montrons que : $d=d'$

$d=x\wedge y$ donc : $\Rightarrow d/x$ et $d/y\Rightarrow d/a$ et d/b

Car il divise toute combinaison de x et y

$\Rightarrow d/a\wedge b\Rightarrow d/d'$

Inversement :

$d'=a\wedge b\Rightarrow d'/a$ et $d'/b\Rightarrow d'/9x+4y$ et $d'/2x+y$

$\Rightarrow d'/(9x+4y)-4(2x+y)$ et $d'/9(2x+y)-2(9x+4y)$

$\Rightarrow d'/x$ et $d'/y\Rightarrow d'/x\wedge y\Rightarrow d'/d$

ce qui entraine: $d=d'$

2) $n\in\mathbb{N}$ on pose : $a=n^2+5n+13$ et $b=n+3$

a) montrons que $a\wedge b=b\wedge 7$?

la division euclidienne de $n^2+5n+13$ par $n+3$

donne : $n^2+5n+13=(n+3)(n+2)+7$

Donc : $a=b(n+2)+7\Leftrightarrow a-b(n+2)=7$

on pose $d'=b\wedge 7$ et $d=a\wedge b$

montrons que : $d=d'$

$d=a\wedge b\Rightarrow d/a$ et $d/b\Rightarrow d/a-b(n+2)$ et d/b

$\Rightarrow d/7$ et $d/b\Rightarrow d/b\wedge 7\Rightarrow d/d'$

$d'=b\wedge 7\Rightarrow d'/7$ et $d'/b\Rightarrow d'/b(n+2)+7$ et d'/b

$\Rightarrow d'/a$ et $d'/b\Rightarrow d'/a\wedge b\Rightarrow d'/d$

ce qui entraine: $d=d'$

b) les valeurs possibles $a\wedge b=d$??

on a : $a\wedge b=b\wedge 7=d$

donc : $d/7$ donc : $d=1$ ou $d=7$

c)montrons que : $n\equiv 4[7]\Leftrightarrow a\wedge b=7$

$n\equiv 4[7]\Leftrightarrow n+3\equiv 0[7]\Leftrightarrow 7/n+3\Leftrightarrow 7/b\Leftrightarrow b\wedge 7=7\Leftrightarrow b\wedge a=7$

d) les valeurs de $n\in\mathbb{N}$ tel que : $a\wedge b=1$??

$a\wedge b=1\Leftrightarrow n$ n'est pas congrue a 0 modulo 4

$n\equiv 0[7]$ ou $n\equiv 1[7]$ ou $n\equiv 2[7]$ ou $n\equiv 3[7]$ ou $n\equiv 5[7]$ ou $n\equiv 6[7]$

8) Les classes d'équivalences.

8.1 Définition et propriété :

Définition : Soit n un entier naturel non nul. L'ensemble des entiers relatifs qui ont le même reste r dans la division euclidienne par n s'appelle la classe d'équivalence de r et se note :

$\overline{r}=\{m\in\mathbb{Z}\,/\,m\equiv r\,[n]\}=\{nk+r \text{ où } k\in\mathbb{Z}\}$

Exemple : Pour n = 7 les restes possibles sont les éléments de l'ensemble :{0,1,2,3,4,5,6}

Donc on peut définir les classes d'équivalences suivantes :

$\overline{0}=\{m\in\mathbb{Z}\,/\,m\equiv 0\,[7]\}$

$\overline{1}=\{m\in\mathbb{Z}\,/\,m\equiv 1\,[7]\}$ et …

$\overline{6}=\{m\in\mathbb{Z}\,/\,m\equiv 6\,[7]\}$

on remarquer que $\overline{0}=\overline{7}$

Les classes d'équivalences modulo 7 constituent :un ensemble noté :

$\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}=\{\overline{0};\overline{1};\overline{2};\overline{3};\overline{4};\overline{5};\overline{6}\}$

Généralisation : $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}=\left\{\overline{0};\overline{1};\overline{2};\overline{3};...;\overline{n-1}\right\}$

8.2 Les opérations sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Définition : Soit n un entier naturel non nul.
On définit dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ les deux lois :
1) L'addition **:** On pose $\overline{a}+\overline{b}=\overline{a+b}$
2) La multiplication **:** On pose : $\overline{a}\times\overline{b}=\overline{a\times b}$

Exemple : Dans $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$: $\overline{3}\times\overline{4}=\overline{0}$ et $\overline{5}+\overline{4}=\overline{3}$

Exercice20: Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{Z}/_{4\mathbb{Z}}$: 1) $\overline{2}x=\overline{3}$ 2) $x^2+\overline{3}x=\overline{0}$
3) $\overline{2013}x^3+\overline{2}x=\overline{k}$

Solution : On a : $\mathbb{Z}/_{4\mathbb{Z}}=\left\{\overline{0};\overline{1};\overline{2};\overline{3}\right\}$

1)On Dresse une table comme suite :

x	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$
$\overline{2}x$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$

Et en utilisant cette une table on déduit que
Cette équation n'admet pas de solutions
Donc : $S=\varnothing$

1)On Dresse une table comme suite :

x	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$
x^2	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$
$\overline{3}x$	$\overline{0}$	$\overline{3}$	$\overline{2}$	$\overline{1}$
$x^2+\overline{3}x$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{2}$

Et en utilisant cette une table on déduit que :
$\overline{0}$ et $\overline{1}$ sont solutions de l'équation
Donc : $S=\left\{\overline{0};\overline{1}\right\}$

2) $\overline{2013}x^3+\overline{2}x=\overline{k}\Leftrightarrow\overline{1}x^3+\overline{2}x=\overline{k}\Leftrightarrow x^3+\overline{2}x=\overline{k}$
Car : $2013=503\times4+1$
On Dresse une table comme suite :

x	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$
x^3	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$
$\overline{2}x$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$
$x^3+\overline{2}x$	$\overline{0}$	$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$

Si $\overline{k}=\overline{0}$: $S=\left\{\overline{0};\overline{2}\right\}$ Si $\overline{k}=\overline{1}$: $S=\left\{\overline{3}\right\}$

Si $\overline{k}=\overline{2}$: $S=\varnothing$ Si $\overline{k}=\overline{3}$: $S=\left\{\overline{1}\right\}$

Exercice21 : Résoudre dans $\left(\mathbb{Z}/_{5\mathbb{Z}}\right)^2$ l'équations suivants : $x+\overline{3}y=\overline{1}$

Solution :on Dresse une table des opérations de $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}=\left\{\overline{0};\overline{1};\overline{2};\overline{3};\overline{4}\right\}$ Comme suite

	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$	$\overline{1}$	$\overline{4}$	$\overline{2}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{4}$	$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$
$\overline{2}$	$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{1}$	$\overline{4}$
$\overline{3}$	$\overline{3}$	$\overline{1}$	$\overline{4}$	$\overline{2}$	$\overline{0}$
$\overline{4}$	$\overline{4}$	$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{1}$

$S=\left\{\left(\overline{0};\overline{2}\right);\left(\overline{1};\overline{0}\right);\left(\overline{2};\overline{3}\right);\left(\overline{3};\overline{1}\right);\left(\overline{4};\overline{3}\right);\left(\overline{4};\overline{4}\right)\right\}$

Exercice22 : Résoudre dans $\left(\mathbb{Z}/_{5\mathbb{Z}}\right)^2$ les système suivants : $\begin{cases}\overline{3}x+\overline{2}y=\overline{1}\\ \overline{2}x+\overline{4}y=\overline{3}\end{cases}$

Solution :

$\begin{cases}\overline{3}x+\overline{2}y=\overline{1}\\ \overline{2}x+\overline{4}y=\overline{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left(\overline{3}+\overline{2}\right)x+\left(\overline{2}+\overline{4}\right)y=\overline{3}+\overline{1}\\ \overline{2}x+\overline{4}y=\overline{3}\end{cases}$

$\begin{cases}y=\overline{4}\\ \overline{2}x+\overline{4}y=\overline{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\overline{1}\\ y=\overline{4}\end{cases}$ donc $S=\left\{\left(\overline{1};\overline{4}\right)\right\}$

Exercice23 : 1) Dresser les tables des opérations de $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$
2) Résoudre dans $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ les équations :
a) $\overline{2}x-\overline{1}=\overline{0}$ b) $\overline{4}x+\overline{1}=x+\overline{3}$
c) $\overline{5}x^2+\overline{3}x+\overline{1}=\overline{0}$

Propriété : Si p est **premier** alors dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ on a :
$(\overline{a}\times\overline{b}=\overline{0}\Leftrightarrow\overline{a}=\overline{0}$ ou $\overline{b}=\overline{0})$

Preuve : Après la décomposition.

9) DECOMPOSITION D'UN ENTIER EN FACTEURS DES NOMBRES PREMIERS

9.1) Définition et propriétés

Activité : Décomposer en produit de facteurs premiers le nombre : 24816

Théorème :
a)Chaque entier **naturel** m non nul s'écrit d'une façon unique comme le produit des facteurs premiers comme suite :

$$m=p_1^{\alpha_1}\times p_2^{\alpha_2}\times p_3^{\alpha_3}\times...\times p_n^{\alpha_n}=\prod_{k=1}^{k=n}p_k^{\alpha_k}$$

b) Chaque entier **relatif** m non nul s'écrit d'une façon unique comme le produit des facteurs premiers comme suite :

$$m=\varepsilon p_1^{\alpha_1}\times p_2^{\alpha_2}\times p_3^{\alpha_3}\times...\times p_n^{\alpha_n}=\prod_{k=1}^{k=n}p_k^{\alpha_k}$$

où $\varepsilon\in\{-1,1\}$

Propriété 1: Soit a un entier relatif dont la décomposition est de la forme :

$$a=\varepsilon p_1^{\alpha_1}\times p_2^{\alpha_2}\times p_3^{\alpha_3}\times...\times p_n^{\alpha_n}=\prod_{k=1}^{k=n}p_k^{\alpha_k}$$

un entier d non nul divise l'entier a si et seulement si d à une décomposition de la forme

$d = \varepsilon p_1^{\beta_1} \times p_2^{\beta_2} \times p_3^{\beta_3} \times \ldots \times p_n^{\beta_n} = \prod_{k=1}^{k=n} p_k^{\beta_k}$ δn où

$(\forall i \in [\![1, n]\!])(0 \leq \beta_i \leq \alpha_i)$

δn un diviseur de a le nombre des valeurs possibles de δi est $\alpha i + 1$

On en déduit que :

Propriété 2 :

$$a = \varepsilon p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times p_3^{\alpha_3} \times \ldots \times p_n^{\alpha_n} = \prod_{k=1}^{k=n} p_k^{\alpha_k}$$

est un entier, le nombre des diviseurs de a est : $2(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\ldots(\alpha_n+1)$

Exercice 24:

1- Décomposer le nombre 2975 en facteurs des nombres premiers

2- Déterminer le nombre des diviseurs de 2975.

3- Déterminer tous les diviseurs positifs de 2975.

Propriété 3 : Soit a un entier relatif dont la décomposition est de la forme :

$$a = \varepsilon p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times p_3^{\alpha_3} \times \ldots \times p_n^{\alpha_n} = \prod_{k=1}^{k=n} p_k^{\alpha_k}$$

un entier m est un multiple de a si et seulement si $m = \varepsilon p_1^{\beta_1} \times p_2^{\beta_2} \times p_3^{\beta_3} \times \ldots \times p_n^{\beta_n} = \prod_{k=1}^{k=n} p_k^{\beta_k}$

où $(\forall i \in [\![1, n]\!])(\alpha_i \leq \beta_i)$

2) Application de la décomposition.

2.1 Le P.G.C.D de deux nombres.

Soient $a = \prod_{k=1}^{k=n} p_k^{\alpha_k}$ =1 et $b = \prod_{k=1}^{k=n} p_k^{\beta_k}$ deux entiers ;le $P.\,G.\,D.\,C\ (a, b)$ est l'entier

$$a \wedge b = \prod_{k=1}^{k=n} p_k^{\inf(\alpha_k;\beta_k)}$$

Remarque : Soient a et b deux entiers relatifs on a : $a \wedge b = |a| \wedge |b|$

Exemple : Déterminer : $(-5664) \wedge (-984)$ et $324 \wedge (-144)$

Exercice25 :

1- Décomposer les nombres 362154 et 82350 en produit des facteurs premiers

2- Déterminer le P.G.C.D de 362154 et 82350

3- Déterminer tous les diviseurs communs de 362154 et 82350

2.2 Le P.P.C.M de deux nombres.

Soient $a = \prod_{k=1}^{k=n} p_k^{\alpha_k}$ =1 et $b = \prod_{k=1}^{k=n} p_k^{\beta_k}$ deux entiers ; le ppmc (a, b) est l'entier

$$a \vee b = \prod_{k=1}^{k=n} p_k^{\sup(\alpha_k;\beta_k)}$$

Exemple :déterminer **:** $d = (-8316) \wedge 1080$ et $m = 8316 \vee 1080$

Solution : la décomposition des nombres 8316 et 1080 en produit des facteurs premiers

Donnent : $8316 = 2^2 \times 3^3 \times 7 \times 11$ et $1080 = 2^3 \times 3^3 \times 5$

$d = 8316 \wedge 1080 = 2^2 \times 3^3 = 108$ et

$m = 8316 \vee 1080 = 2^3 \times 3^3 \times 5 \times 7 \times 11 = 11880$

2.3 Applications de la décomposition.

Propriété : Soient a et b deux entiers relatifs non nuls, on a les assertions suivantes :

1) $(a \wedge b) \times (a \vee b) = |ab|$

2) $ca \vee cb = c(a \vee b)$

3) $ca \wedge cb = c(a \wedge b$

Exemple :si $2 = a \wedge b$ et $-12 = a \times b$ déterminer **:** $a \vee b$

<u>Solution :</u> on a $a \wedge b) \times (a \vee b) = |ab|$

donc : $a \vee b = |a \times b| / a \wedge b = |-12|/2 = 6$

Exercice26: $a = (25^n - 1)(36^n - 1)$ et $b = (5^n - 1)(6^n - 1)$

Calculer les $a \vee b \quad (n \in \mathbb{N})$

Solution :

$a = ((5^n)^2 - 1)((6^n)^2 - 1) = (5^n - 1)(5^n + 1)(6^n - 1)(6^n + 1)$

$a = b(5^n + 1)(6^n + 1)$ donc : b / a donc : $a \vee b = a$

II) THEOREMES PRINCIPAUX

1) Théorème de Bézout :

Théorème1 : Soient a et b et des entiers relatifs non nuls :

$$a \wedge b = d \Leftrightarrow \exists(\alpha, \beta) \in \mathbb{Z}^2; \begin{cases} a = \alpha d \\ b = \beta d \\ \alpha \vee \beta = 1 \end{cases}$$

Preuve : ($\Rightarrow$) On suppose que $a \wedge b = d$

On a $d|a$ et $d|b$ donc $\exists(\alpha, \beta) \in \mathbb{Z}^2$ tel que : $a = \alpha d$ et $b = \beta d$ donc :$d = \alpha d \wedge \beta d = |d|(\alpha \wedge \beta)$

et puisque $d \in \mathbb{N}^*$ alors $\alpha \wedge \beta = 1$

($\Leftarrow$) On suppose que $\exists(\alpha, \beta) \in \mathbb{Z}^2; \begin{cases} a = \alpha d \\ b = \beta d \\ \alpha \vee \beta = 1 \end{cases}$

On a : $a \wedge b = \alpha d \wedge \beta d = |d|\ (\alpha \wedge \beta) = d$

Car ($|d| = d$ et $\alpha \wedge \beta = 1$) cqfd

Théorème2 : Soient a et b et des entiers relatifs non nuls : $a \wedge b = d \Rightarrow \exists\ (u, v) \in \mathbb{Z}^2$; $d = au + b$

Preuve :
1- Si $a|b$ alors $a \wedge b = |b|$
- si $b > 0$ alors $b = 0a + 1b$
- si $b < 0$ alors $b = 0a + (-1)b$

2- Si $b|a$ (même raisonnement)
3- On suppose que b ne divise pas a tel que :
$0 < b < a$ et d'après l'algorithme d'Euclide on a :
$a = bq_0 + r_0$
$r_0 \neq 0$ alors : $b = r_0q_1 + r_1$
si $r_1 \neq 0$ alors :$r_0 = r_1q_2 + r_2$
si $r_2 \neq 0$ alors :
…….
$$r_{n-2} = r_{n-1}q_n + r_n$$
si $r_n \neq 0$ alors : $r_{n-1} = r_nq_{n+1} + r_{n+1}$
si $r_{n+1} = 0$ on arrête le processus .
Et d'après la propriété précédente :
$a \wedge b = b \wedge r_1 = r_1 \wedge r_2 = \cdots = r_{n-1} \wedge r_n = r_n$
car : $r_n | r_{n-1}$ et $0 < r_n < r_{n-1} < \cdots < r_1 < r_0 < b$
On obtient : $r_0 = a - bq_0 = u_0a + v_0b$
où $u_0 = 1$ et $v_0 = -q$
$r_1 = b - r_0q_1 = b - (a - bq_0)q_1 =$
$= -aq_1 + b(1 + q_0q_1) = u_1a + v_1b$
Où $u_1 = -q_1$ et $v_1 = (1 + q_0q_1)$
On répète le processus et à chaque fois on montre que : $r_k = au_k + bu_k$:
Cette opération est valable pour tous les reste r_k
En particulier pour le dernier reste r_n qui est : $a \wedge b$ donc :
$\exists\ (u_n, v_n) \in \mathbb{Z}^2;\ a \wedge b = au_n + bv_n.$

Remarque :1) Dans l'écriture $\exists(u, v) \in \mathbb{Z}^2$:
$a \wedge b = au + bv$ le couple (u, v) n'est pas unique.
Ex : on a : $12 \wedge 9 = 3$
et on a $3 = 1 \times 12 + (-1) \times 9$
et $3 = (-2) \times 12 + 3 \times 9$
2) La réciproque du théorème n'est pas vraie :
$2 \times 12 + (-2) \times 9 = 6$ mais $12 \wedge 9 = 3 \neq 6$

Théorème (Théorème de Bézout)
Soient a et b et des entiers relatifs non nuls :
$\boldsymbol{a \wedge b = 1 \Leftrightarrow \exists\ (u, v) \in \mathbb{Z}^2\ ;\ 1 = au + bv}$

Preuve :(⇒) C'est le théorème précèdent.
(⇐) On suppose que $1 = au + bv$
Soit $d = a \wedge b$ on aura : $d|a$ et $d|b$
Donc : $d|ua$ et $d|vb$ par suite $d|ua + vb = 1$
Donc $d = 1 (d \in \mathbb{N}^*)$ et donc $a \wedge b = 1$

Exemples :
1) $(5n + 3) \wedge (2n + 1) = 1$
Car : $2 \times (5n + 3) + (-5) \times (2n + 1) = 1$
2) $(n + 2) \wedge (n^2 + 2n - 1) = 1$
Car $n \times (n + 2) + (-1) \times (n^2 + 2n - 1) = 1$

Exercice27 : montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$
$(3n+1) \wedge (7n+2) = 1$

Solution: on a : $7(3n+1) - 3(7n+2) = 1$
Donc : $\exists(u;v) \in \mathbb{Z}^2$ tel que
$u(3n+1) + v(7n+2) = 1 \quad u = 7$ et $v = -3$
Donc d'après le théorème de Bézout on a :
$(3n+1) \wedge (7n+2) = 1$

<u>Application 1</u> : L'utilisation de l'algorithme d'Euclide pour déterminer les coefficients de Bézout
Exemple : Montrons que : $360 \wedge 84 = 12$ et déterminer u et v dans $\mathbb{Z}$ tels que :
$360u + 84v = 12$
Solution : on a : $360 = 2^3 . 3^2 . 5$ et $84 = 2^2 . 3.7$
Donc $360 \wedge 84 = 2^2 . 3 = 12$
D'autre part : $360 = 84 \times 4 + 24$ donc :
$24 = a - (b \times 4)$
On a : $84 = 24 \times 3 + 12$
Donc : $b - (a - (b \times 4)) \times 3 = 12$
On a : $24 = 12 \times 2 + 0$
Donc : $\boldsymbol{-3a + 13b = 12}$

<u>Application 2</u> : détermination d'une solution particulière de l'équation de la forme :
(E) : $ax + by = 1$
Exemple : Considérons dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E): $17x + 36y = 1$ et déterminons une solution particulière de (E).
Solution : On a $17 \wedge 36 = 1$ donc d'après le théorème de $Bézout$; il existe u et v tels que :
$17u + 36v = 1$ donc (E) admet une solution.
On pose $a = 36$ et $b = 17$ on obtient :
$a = 2b + 2$ et $b = 8 \times 2 + 1$
Donc : $2 = a - 2b$ et $b = 8 \times (a - 2b) + 1$
D'où : $-8a + 17b = 1$
Donc le couple $(-8,17)$ est une solution de l'équation (E).

2) Application du théorème de Bézout :

Théorème de Gauss :
Soient a, b et c des entiers relatifs non nuls :
$$\begin{cases} c/ab \\ c \vee a = 1 \end{cases} \Rightarrow c/b$$
Preuve : On a : $c \wedge a = 1$ d'après le théorème de Bézout : $(\exists(u, v) \in \mathbb{Z}^2)(au + vc = 1)$
d'où $bau + bvc = b$
Et puis que $c|ab$ alors $ab = kc$ (où $k \in \mathbb{Z}$) donc
$kcu + bvc = b$ d'où $c(ku + bv) = b$
et $ku + bv \in \mathbb{Z}$ donc $c|b$.

Remarque :
La condition $c \wedge$ a = 1 dans le théorème de Gauss est indispensable ; $6|4 \times 3$
Mais $6 \nmid 3$ et $6 \nmid 4$

Théorème : Soient a, b et c des entiers relatifs non nuls : $\begin{cases} a/c \text{ et } b/c \\ a \vee b = 1 \end{cases} \Rightarrow ab/c$

Preuve : On a : $a|c$ et $b|c$ donc ils existent k et h tels que : $c = ka = hb$ et puisque $a \wedge b = 1$ alors : $(\exists(u, v) \in \mathbb{Z}^2)(au + vb = 1)$
Donc : (en multipliant par c) $c = cau + cvb$
Donc : $c = hbau + kavb$
Donc : $c = ab(hu + kv)$ et par suite $ab|c$

Remarque : La condition $c \wedge b = 1$ dans le théorème précèdent est indispensable.
Ex : $6|12$ et $3|12$ mais $6 \times 3 = 18 \nmid 12$.

Exercice28 : résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation suivante : $(E)\ 7(x-2)=3(y+1)$

Solution : $7(x-2)=3(y+1) \Leftrightarrow 7/3(y+1)$
Or on sait que : $7 \wedge 3 = 1$
Donc d'après le théorème de Gauss : $7/y+1$
Donc $\exists k \in \mathbb{Z} / y+1=7k \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} / y=7k-1$

$$(E) \Leftrightarrow \begin{cases} 7(x-2)=3(y+1) \\ \exists k \in \mathbb{Z} / y=7k-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7(x-2)=3\times 7k \\ \exists k \in \mathbb{Z} / y=7k-1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-2=3k \\ \exists k \in \mathbb{Z} / y=7k-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3k+2 \\ \exists k \in \mathbb{Z} / y=7k-1 \end{cases}$$

Donc $S=\{(3k+2;7k-1) / k \in \mathbb{Z}\}$

Exercice29 : déterminer l'entier naturel n tel que : $\dfrac{n(n^2+3n-2)}{n+1} \in \mathbb{N}$

Solution : 1) 2) $\dfrac{n(n^2+3n-2)}{n+1} \in \mathbb{N} \Leftrightarrow n+1 / n(n^2+3n-2)$ or on a : $1=(n+1)\wedge n$ car $(n+1)-n=1$ (bezout)
Donc : $n+1 / n^2+8n-2$
La division euclidienne de n^2+3n-2 par $n+1$
Donne : $n^2+3n-2=(n+1)(n+2)-4$

$n+1 / n^2+3n-2$ et $n+1 / n+1 \Rightarrow n+1 / n^2+3n-2-(n+1)(n+2)$
$\Rightarrow n+1 / -4 \Rightarrow n+1 / 4$

Il faut que $n+1 \in \{1;2;4\}$ ce qui entraine :
$n \in \{0;1;3\}$
Inversement : On vérifie que 0 ;1 ;3 vérifient $\dfrac{n(n^2+3n-2)}{n+1} \in \mathbb{N}$ Avant de conclure que :
$\dfrac{n(n^2+3n-2)}{n+1} \in \mathbb{N} \Leftrightarrow n \in \{0;1;3\}$

Propriétés : Soient a, b et c des entiers relatifs non nuls :

1) $\begin{cases} a \vee b = 1 \\ a \vee c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow a \vee (bc) = 1$

2) $a \wedge b = 1 \Leftrightarrow a \wedge b^n = 1 \quad (n \in \mathbb{N}^*)$
3) $a \wedge b = 1 \Leftrightarrow a^n \wedge b^m = 1$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ et $(m \in \mathbb{N}^*)$

Preuve :
1)(⇒) On suppose que $\begin{cases} a \vee b = 1 \\ a \vee c = 1 \end{cases}$ donc :
$(\exists(u, v) \in \mathbb{Z}2)(au + vb = 1)$
$(\exists(\alpha, \beta) \in \mathbb{Z}2)(a\alpha + \beta c = 1)$
Par le produit on obtient : $(au + vb)(a\alpha + \beta c) = 1$;
d'où après développement on obtient :
$a^2u\alpha + au\beta c + vba\alpha + vb\beta c = 1$
et donc $(au\alpha + u\beta c + vb\alpha)a + (v\beta)bc = 1$
Donc : d'après Bézout $a \wedge bc = 1$
(⇐) On suppose que $a \wedge bc = 1$
Donc $(\exists(u, v) \in \mathbb{Z}^2)(au + vbc = 1)$
D'où $au + (vb)c = 1$ donc :
$a \wedge c = 1$ et $au + (vc)b = 1$ donc $a \wedge b = 1$
2)(⇒) On suppose que $a \wedge b = 1$ et on montre par récurrence que : $a \wedge b^n = 1$
- Pour $n = 1$ la propriété est vraie.
- On suppose que la propriété est vraie pour n
- On montre qu'elle est vraie pour $n + 1$

On a : $\begin{cases} a \vee b^n = 1 \\ a \vee b = 1 \end{cases} \Rightarrow a \vee (b^n \times b) = 1$ d'après 1)
d'où $a \wedge b^{n+1} = 1$ Donc si $a \wedge b = 1$ alors :
$a \wedge b^n = 1$ pour tout n dans $\mathbb{N}^*$
(⇐)On suppose que $a \wedge b^n = 1$ donc et d'près le théorème de Bézout $(\exists(u, v) \in \mathbb{Z}^2)(au + vb^n = 1)$
Donc : $au + (vb^{n-1})b = 1$ donc $(\exists(u', v') \in \mathbb{Z}2)$ $(au' + v'b = 1)$ et par suite $a \wedge b = 1$
3) Est un résultat immédiat de 2)

Exercice30: 1)Montrer que : $\forall a \in \mathbb{Z}^*$ et $\forall b \in \mathbb{Z}^*$

on a : $a \wedge b = 1 \Rightarrow \begin{cases} a \wedge (a+b) = 1 \\ b \wedge (a+b) = 1 \\ a \wedge b(a+b) = 1 \\ (a+b) \wedge ab = 1 \end{cases}$

Solution: on pose $d = a \wedge (a+b)$
montrons que : $d = 1$
$d = a \wedge b \Rightarrow d/a$ et $d/a+b \Rightarrow d/a$ et $d/a+b-a$
$\Rightarrow \Rightarrow d/a$ et $d/b \Rightarrow d/b \wedge a \Rightarrow d/1 \Rightarrow d=1$
ce qui entraine: $1 = a \wedge (a+b)$ (1)
de même on montre que : $1 = b \wedge (a+b)$ (2)
de (1) et (2) en déduit que **:** $(a+b) \wedge ab = 1$
D'après une proposition
Et on a $a \wedge (a+b) = 1$ et $a \wedge b = 1$ donc
$a \wedge b(a+b) = 1$ D'après la même proposition

Exercice31 : Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}$

$(2n+5)\wedge(n^2+5n+6)=1$

Solution : on a **:** $n^2+5n+6=(n+2)(n+3)$

Et on a : $(2n+5)-2(n+2)=1$

Donc d'après le théorème de Bézout

$(n+2)\wedge(2n+5)=1$ (1)

De même : on a : $2(n+3)-(2n+5)=1$

Donc d'après le théorème de Bézout

$(n+3)\wedge(2n+5)=1$ (2)

de (1) et (2) en déduit que

$(2n+5)\wedge((n+3)(n+2))=1$

Donc : $(2n+5)\wedge(n^2+5n+6)=1$

3) L'équation $ax+by=c$

Théorème : (fondamental)

L'équation (E) : $ax+by=c$ admet une solution si et seulement si $(a\wedge b)|c$

Preuve :

($\Leftarrow$) On suppose que $d=(a\wedge b)|c$ alors :

$(\exists k\in\mathbb{Z})(c=kd)$ et on a :

$(\exists(u,v)\in\mathbb{Z}^2)(au+vb=d)$

$kd=k(a\wedge b)=(ku)a+(kv)b$

C'est-à-dire : $c=(ku)a+(kv)b$

donc l'équation (E) admet (x_0,y_0) comme solution où $x_0=ku$ et $y_0=kv$

($\Rightarrow$) Inversement : On suppose que : $ax+by=c$ admet une solution (x_0,y_0), donc: $a.x_0+b.y_0=c$

Puisque : $(a\wedge b)|a$ et $(a\wedge b)|b$

alors $(a\wedge b)|x_0.a$ et $(a\wedge b)|y_0.b$

donc $(a\wedge b)|(x_0.a+y_0.b)=c$

donc : $(a\wedge b)|c$.

Théorème : Si le couple $(x_0;y_0)$ est une solution de l'équation (E) : $ax+by=c$ alors, l'ensemble des solutions de (E) est :

$$S=\left\{\left(x_0+\frac{kb}{a\wedge b};y_0-\frac{ka}{a\wedge b}\right);k\in\mathbb{Z}\right\}$$

Preuve : On pose : $A=\left\{\left(x_0+\frac{kb}{a\wedge b};y_0-\frac{ka}{a\wedge b}\right);k\in\mathbb{Z}\right\}$

et on montre que : $A\subset S$ et $S\subset A$?

1) Montrons que $A\subset S$: il suffit de montrer que le couple $\left(x_0+\frac{kb}{a\wedge b};y_0-\frac{ka}{a\wedge b}\right)$ est solution de l'équation (E) :On a :

$$a\left(x_0+\frac{kb}{a\wedge b}\right)+b\left(y_0-\frac{ka}{a\wedge b}\right)$$

$$=ax_0+\frac{kab}{a\wedge b}+by_0-\frac{kba}{a\wedge b}=ax_0+by_0=c$$

Donc le couple $\left(x_0+\frac{kb}{a\wedge b};y_0-\frac{ka}{a\wedge b}\right)$ (pour $k\in\mathbb{Z}$) est solution : d'où : $A\subset S$.

2) On suppose que le couple $(x,y)\in S$

Donc (x,y) est solution de l'équation (E)

d'où $ax+by=c$; or : $(x_0;y_0)$ est une solution de l'équation (E) donc : $ax_0+by_0=c$

Donc (la différence membre à membre) donne :

$a(x-x_0)=-b(y-y_0)$

Soit $d=a\wedge b$ on a : $(\exists(\alpha,\beta)\in\mathbb{Z}^2)$

$a=\alpha d$ et $b=\beta d$ et $\alpha\wedge\beta=1$

Donc :$(x,y)\in S\Leftrightarrow a(x-x_0)=-b(y-y_0)$

$\Leftrightarrow \alpha d(x-x_0)=-\beta d(y-y_0)$

$\Leftrightarrow \alpha(x-x_0)=-\beta(y-y_0)$ (*) $(d\neq 0)$

On conclut que : $\beta|\alpha(x-x_0)$ et puisque :

$\alpha\wedge\beta=1$ alors (d'après T. Gauss) $\beta|(x-x_0)$

Donc $(\exists k\in\mathbb{Z})((x-x_0)=k\beta)$

et par suite : (*) $\alpha k\beta=-\beta(y-y_0)$

d'où : $y-y_0=-k\alpha$ Par suite :

$(x,y)\in S\Leftrightarrow(y-y_0)=-k\alpha$ et $(x-x_0)=k\beta$

où $k\in\mathbb{Z}$

en remplaçant α par $\frac{a}{d}$ et β par $\frac{b}{d}$ on obtient :

$(x,y)\in S\Leftrightarrow x=x_0+\frac{kb}{d}$ et $y=y_0-\frac{ka}{d}$ cqfd

Exemple : Considérons l'équation :

(E): $756x-245y=14$

1- Montrer l'équation (E) admet une solution.

2- Déterminer une solution particulière de (E)

3- Résoudre l'équation (E)

Solution : $756=2^2\times3^3\times7$ et $245=5\times7^2$

1) On a : $756\wedge245=7$ et $7|14$ donc l'équation (E) admet une solution dans $\mathbb{Z}^2$

2- En utilisant l'algorithme d'Euclide on obtient :

$a=756$ et $b=245$

$a=3\times b+21$

$b=11\times21+14$

$21=14+7$

On a donc :$21=a-3b$

$b=11\times(a-3b)+14\Leftrightarrow 14=34b-11a$

$7=(a-3b)-(34b-11a)\Leftrightarrow 7=12a-37b$

Finalement :$14=24a-74b$ et donc le couple $(24,74)$ est une solution particulière de (E)

D'où : $S=\left\{\left(24-\frac{245}{7}k;74-\frac{756}{7}k\right);k\in\mathbb{Z}\right\}$

$S=\{(24-35k;74-108k);k\in\mathbb{Z}\}$

$S=\{(24+35k;74+108k);k\in\mathbb{Z}\}$

4) La congruence modulo n, complément.

Théorème : Soient a, b et c des entiers relatifs non nuls. et $n \in \mathbb{N}^*$ et $d = n \wedge c$ on a :

$$ac \equiv bc\ [n] \Leftrightarrow a \equiv b\ [\frac{n}{d}]$$

Preuve :(⇒) On suppose : $ac \equiv bc\ [n]$,

donc $n|(ac - bc) = c(a - b)$ donc $\frac{n}{d} | \frac{c}{d}\ (a - b)$

et comme $\frac{n}{d} \wedge \frac{c}{d} = 1$Alors :(D'après théorème de Gauss) $\frac{n}{d}|(a - b)$ donc : $a \equiv b\ [\frac{n}{d}]$

(⇐)On suppose que : $a \equiv b\ [\frac{n}{d}]$

donc $a = b + k\frac{n}{d}$ $(k \in \mathbb{Z})$ donc $da = db + kn$

$(d = n \wedge c \Rightarrow c = \alpha d)$

Donc : $\alpha da = \alpha db + \alpha kn$

D'où $ca = cb + hn$ donc $ac \equiv bc\ [n]$.

Propriété :

1) $\begin{cases} ac \equiv bc[n] \\ c \vee n = 1 \end{cases} \Rightarrow a \equiv b[n]$

2) $\begin{cases} a \equiv b[n] \\ m/n \end{cases} \Rightarrow a \equiv b[m]$

3) $\begin{cases} ac \equiv bc[p] \\ p \text{ premier et } p \nmid c \end{cases} \Rightarrow a \equiv b[p]$

Preuve : Ce sont des résultats immédiats du théorème précédent.

Exercice32 : déterminer dans $\mathbb{N}^2$ les couples $(x;y) / \begin{cases} x+y=48 \\ x \wedge y = 4 \end{cases}$ avec $x \leq y$

Solution : $\begin{cases} x+y=48 \\ x \wedge y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \exists(x';y') \in \mathbb{N}^2 / \begin{cases} x = 4x' \\ y = 4y' \\ x+y=48 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \exists(x';y') \in \mathbb{N}^2 / 4x'+4y' = 48$

$\Leftrightarrow \exists(x';y') \in \mathbb{N}^2 / x'+y' = 12$

On Dresse une table comme suit :

x'	0	1	2	3	4	5	6
y'	12	11	10	9	8	7	6
x	0	4	8	12	16	20	24
y	48	44	40	36	32	28	24

Donc :

$S = \{(0;48);(4;44);(8;40);(12;36);(16;32);(20;28);(24;24)\}$

Exercice33: résoudre dans $\mathbb{Z}$ le système suivant: $\begin{cases} 2x \equiv 3[7] \\ 3x \equiv 1[5] \end{cases}$

Solution: $\begin{cases} 2x \equiv 3[7] \\ 3x \equiv 1[5] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x \equiv -4[7] \\ 3x \equiv 1[5] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \equiv -2[7] \\ 3x \equiv 1[5] \end{cases}$

Car $2 \wedge 7 = 1$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \equiv 5[7] \\ 3x \equiv 1[5] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5+7k; k \in \mathbb{Z} \\ 3x \equiv 1[5] \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 5+7k; k \in \mathbb{Z} \\ 3(5+7k) \equiv 1[5] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5+7k; k \in \mathbb{Z} \\ k \equiv 1[5] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5+7k; k \in \mathbb{Z} \\ k = 1+5k' \end{cases}$

$\Leftrightarrow x = 5+7(1+5k'); k' \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = 35k'+12; k' \in \mathbb{Z}$

$S = \{35k'+12; k' \in \mathbb{Z}\}$

5) Le P.G.D.C et le P.P.M.C de plusieurs nombres.

Définition : Soient $a_1, a_2, \dots, a_n$ des entiers relatifs non nuls, le plus grand entier naturel d qui divise en même temps tous les nombres a_1, $a_2, \dots, a_n$ s'appelle le plus grand diviseur commun des nombres $a_1, a_2, \dots, a_n$ et se note : $d = a_1 \wedge a_2 \wedge \dots \wedge a_n$

Théorème : Soient $a_1, a_2, \dots, a_n$ des entiers relatifs non nuls ; on a :

$a_1 \wedge a_2 \wedge \dots \wedge a_n = (a_1 \wedge a_2 \wedge \dots \wedge a_{n-2}) \wedge (a_{n-1} \wedge a_n)$

Exemple :

$756 \wedge 350 \wedge 616 = 756 \wedge (350 \wedge 616)$
$= 756 \wedge 14 = 14$

Théorème (*Généralisation de Bézout*)

Si $d = a_1 \wedge a_2 \wedge \dots \wedge a_n$ alors $\exists(\alpha_i)_{1\leq i\leq n}$ telle que : $d = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i$

Preuve : par récurrence

Définition : On dit que les entiers relatifs non nuls : $a_1, a_2, \dots, a_n$ sont premiers entre eux si : $a_1 \wedge a_2 \wedge \dots \wedge a_n = 1$

Remarque : Les entiers relatifs non nuls $a_1, a_2, \dots, a_n$ sont premiers entre eux ne veut pas dire que les entiers $a_1, a_2, \dots, a_n$ sont premiers entre eux deux à deux.

Exemple :3, 5 et 6 sont premiers entre eux.
Alors que : 3et 6 ne sont pas premiers entre eux.

Théorème (*Généralisation de Bézout*)

$a_1 \wedge a_2 \wedge \dots \wedge a_n = 1$si et seulement si $\exists(\alpha_i)_{1\leq i\leq n}$ telle que : $1 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i$

Définition : Soient $a_1, a_2, \dots, a_n$ des entiers relatifs non nuls, le plus petit entier naturel m qui est multiple en même temps tous les nombres

$a_1, a_2, \dots, a_n$ s'appelle le plus petit multiple commun des nombres $a_1, a_2, \dots, a_n$ et se note : $m = a_1 \vee a_2 \vee \dots \vee a_n$

Exercice34: montrer que l'ensemble des solutions du système suivant est non vide :

$$\begin{cases} n \equiv 2[11] \\ n \equiv 3[7] \end{cases}$$

Solution :

$$\begin{cases} n \equiv 2[11] \\ n \equiv 3[7] \end{cases} \Leftrightarrow \exists (x;y) \in \mathbb{Z}^2 / \begin{cases} n = 11x+2 \\ n = 7y+3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \exists (x;y) \in \mathbb{Z}^2 / 11x+2 = 7y+3$$

$$\Leftrightarrow \exists (x;y) \in \mathbb{Z}^2 / 11x-7y = 1$$

Or on sait que : $7 \wedge 11 = 1$

Donc d'après le théorème de Bézout :

$\exists (u;v) \in \mathbb{Z}^2 / 11u+7v = 1$

Donc il suffit de prendre : $\begin{cases} x = u \\ y = -v \end{cases}$

Donc $\exists (x;y) \in \mathbb{Z}^2 / \begin{cases} n = 11x+2 \\ n = 7y+3 \end{cases}$

Par suite : l'ensemble des solutions du système est non vide

Exercice35: résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation suivante: (E) $5x-3y=1$

Solution : On a : $5\times 2 - 3\times 3 = 1$ donc $(2;3)$ est une solution particulière de l'équation

Donc : $5x-3y = 5\times 2 - 3\times 3$

Donc : $5(x-2) = 3(y-3)$ $\Rightarrow 5/3(y-3)$

Or on sait que : $5 \wedge 3 = 1$

Donc d'après le théorème de Gauss : $5/y-3$

Donc $\exists k \in \mathbb{Z} / y-3 = 5k \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} / y = 5k+3$

$$(E) \Leftrightarrow \begin{cases} 5(x-2) = 3(y-3) \\ \exists k \in \mathbb{Z} / y = 5k+3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5(x-2) = 3\times 5k \\ \exists k \in \mathbb{Z} / y = 5k+3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-2 = 3k \\ \exists k \in \mathbb{Z} / y = 5k+3 \end{cases} \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} / \begin{cases} x = 3k+2 \\ y = 5k+3 \end{cases}$$

Donc $S = \{(3k+2; 5k+3) / k \in \mathbb{Z}\}$

6) Propriétés des nombres premiers.

Théorème :

1) Si p et q sont des nombres premiers positifs alors ils sont premiers entre eux.

2) Si p est premier alors il est premier avec tout nombre entier non nul a tel que $p \nmid a$

Remarque :

La réciproque de 1) n'est pas vrais ; 14 et 9 sont premiers entre eux mais aucun d'eux n'est premiers.

Propriétés :

1) $\begin{cases} p/ab \\ p \text{ premier et } p \nmid a \end{cases} \Rightarrow p/b$

2) $\begin{cases} p/ab \\ p \text{ premier} \end{cases} \Rightarrow p/a \text{ ou } p/b$

3) $\begin{cases} p \Big/ \prod_{i=1}^{n} a_i \\ p \text{ premier} \end{cases} \Rightarrow \exists 1 \le i \le n \; p/a_i$

4) $\begin{cases} p \Big/ \prod_{i=1}^{n} p_i \\ p \text{ premier} \\ \forall 1 \le i \le n ; p_i \text{ premier} \end{cases} \Rightarrow \exists 1 \le i \le n ; p = p_i$

7) Le petit théorème de Fermat.

Théorème : Si p est un nombre premier et a un entier relatif non nul et pas divisible par p alors :

$a^{p-1}-1$ est divisible par p c'est-à-dire a

$a^{p-1} \equiv 1[p]$ ou encore : $a^p \equiv a[p]$

Preuve : Soient p un nombre premier et k un entier naturel tel que $1 \le k \le p-1$

On a p premier et $p > k$ donc $p \nmid k$ et par suite $p \wedge k = 1$ d'autre part :

$$kC_p^k = k\frac{p!}{k!(p-k)!} = \frac{p(p-1)!}{(k-1)!(p-k)!} = pC_{p-1}^{k-1}$$

Donc p/kC_p^k et comme $p \wedge k = 1$ alors d'après T. Gauss p/C_p^k

Montrons que $p/(a+1)^p - a^p - 1$?

D'après la formule de binôme On a :

$(a+1)^p = a^p + C_p^1 a^{p-1} + C_p^2 a^{p-2} + \dots + C_p^{p-1} a^1 + 1$

Donc $(a+1)^p - a^p - 1 = C_p^1 a^{p-1} + C_p^2 a^{p-2} + \dots + C_p^{p-1} a^1$

Et comme p/C_p^k pour $1 \le k \le p-1$

Alors : $p/(a+1)^p - a^p - 1$

On a donc : $(a+1)^p - a^p - 1 \equiv 0[p]$

donc : $(a+1)^p - 1 \equiv a^p [p]$

Montrons par récurrence sur a (On prend pour le moment $a \in \mathbb{N}$) que $a^p \equiv a[p]$?

a) Pour $a = 0$ la propriété est vraie car 0 $0 \equiv 0$ $[p]$

b) On suppose que la propriété est vraie pour a c'est-à-dire $a^p \equiv a[p]$

c) Montrons que la propriété est vraie pour $(a+1)$ c'est-à-dire $(a+1)^p \equiv a+1[p]$?

On a : d'après les questions précédentes $(a+1)^p - 1 \equiv a^p[p]$ Or d'après H.R : $a^p \equiv a[p]$

donc : $(a+1)^p \equiv a+1[p]$

Donc $(\forall a \in \mathbb{N})(\forall p \in \mathbb{P})(\ a^p \equiv a[p])$

Si $a < 0$ alors $-a > 0$:

o Si $p = 2$ on aura $a^2 = (-a)^2 \equiv (-a)\ [2]$

et $-a \equiv a\ [2]$ car $(2|(a-(-a)) = 2a)$

o si $p \geq 3$ alors p est impaire et $(-a)^p = -a^p$ et

$(-a)^p \equiv -a[p]$ on en déduit que $-a^p \equiv -a[p]$ et

finalement $a^p \equiv a[p]$ D'où le théorème.

Exemple : Montrons que : $(\forall n \geq 2)$: $n^5 \equiv n[30]$

Solution : On a : d'après le petit théorème de Fermat : $n^5 \equiv n[5]$ Donc : $5/n^5 - n$

D'autre part : $n^5 - n = n(n^4-1) = n\left(\left(n^2\right)^2 - 1\right)$

$n^5 - n = n(n^4-1) = n(n-1)(n+1)(n^2+1)$

Donc $2|n(n-1)$ et $3|(n-1)n(n+1)$ et puisque 2 et 3 sont premiers alors $6 = (2 \times 3)$ divise $n^5 - n$

Finalement :

$$\begin{cases} 5/n^5 - n \\ 6/n^5 - n \Rightarrow 30 = 6 \times 5/n^5 - n \\ 6 \wedge 5 = 1 \end{cases}$$

Donc : $n^5 \equiv n[30]$

III) SYSTEMES DE NUMERATION

1) Théorème et définition

Théorème : Soit b un entier naturel tel que: $b > 1$

Chaque entier naturel non nul n s'écrit d'une façon unique de la forme :

$n \equiv a_m b^m + a_{m-1} b^{m-1} + \ldots + a_1 b^1 + a_0$

Où : les $(a_i)1 \leq i \leq n$ sont des entiers naturels

$0 \leq a_i \leq b-1$ et $a_m \neq 0$

Preuve :En utilisant la division Euclidienne de n par b on obtient : $n = q_1 b + a_0$ où $0 \leq a_0 < b$

- Si $q_1 \leq b-1$ on s'arrête et $a_1 = q_1$
- si $q_1 \geq b$, On effectue une autre division Euclidienne de q_1 sur b on obtient: $q_1 = q_2 b + a_1$ et par suite :

$n = (q_2 b + a_1)b + a_0 = q_2 b^2 + a_1 b + a_0$.

- Si $q_2 \leq b-1$ on s'arrête et $a_2 = q_2$
- Si non on continue le processus

Notation :

Si $n \equiv a_m b^m + a_{m-1} b^{m-1} + \ldots + a_1 b^1 + a_0$ on écrit :

$n \equiv \overline{a_m a_{m-1} \ldots a_1 a_0}_{(b)}$ Cette écriture s'appelle l'écriture de l'entier n dans la base b

Exemple1 : Le nombre $n = 2987$ s'écrit

$n = \overline{2987}_{(10)}$

Car : $n = 2 \times 10^4 + 9 \times 10^3 + 8 \times 10^2 + 7$

Essayons d'écrire n dans la base 6 :

On a : $2987 = 6 \times 497 + 5$

$497 = 6 \times 82 + 5$

$82 = 6 \times 13 + 4$

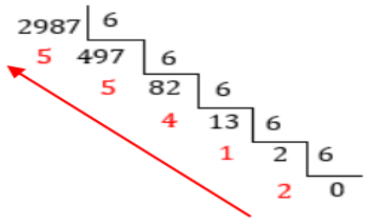
$13 = 6 \times 2 + 1$

$2 = 6 \times 0 + 2$

Donc $2987 = 2 \times 6^4 + 1 \times 6^3 + 4 \times 6^2 + 5 \times 6 + 5$

$n = \overline{21455}_{(6)}$

Cette succession de divisions Euclidiennes se représente comme suite :



Exemple2 : soit $N = \overline{dcba}_{(10)}$ un entier naturel montrer que : $N \equiv a - b + c - d[11]$

Solution :

on a : $N = \overline{dcba} = a + b \times 10 + c \times 10^2 + d \times 10^3$

et on a : $10 \equiv -1[11]$ et $10^2 \equiv 1[11]$ et $10^3 \equiv -1[11]$

Donc : $N \equiv a - b + c - d[11]$

2) Les opérations dans une base de numération

2.1 La somme : On peut effectuer la somme dans une base donnée b par deux façons différentes :

a) **La décomposition :**

$\overline{2534}_{(7)} + \overline{631}_{(7)} = 2 \times 7^3 + 5 \times 7^2 + 3 \times 7^1 + 4 \times 7^0 +$

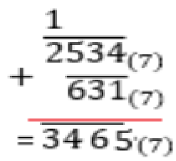
$+ 6 \times 7^2 + 3 \times 7^1 + 1 \times 7^0$

$\overline{2534}_{(7)} + \overline{631}_{(7)} = 2 \times 7^3 + 11 \times 7^2 + 6 \times 7^1 + 5 \times 7^0$

$\overline{2534}_{(7)} + \overline{631}_{(7)} = 3 \times 7^3 + 4 \times 7^2 + 6 \times 7^1 + 5 \times 7^0$

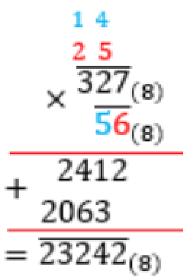
$\overline{2534}_{(7)} + \overline{631}_{(7)} = \overline{3465}_{(7)}$

b) Calcul direct avec le retenu



2.2 Le produit :

Il est préférable d'effectuer le produit en utilisant le calcul direct avec le retenu car la décomposition risque d'être longue :



Pour vérifier : $\overline{327}_{(8)} \times \overline{56}_{(8)}$

$= (3 \times 8^2 + 2 \times 8 + 7) \times (5 \times 8 + 6)$

$= 9890$

$= \overline{23242}_{(8)}$

2.3 Opérations dans différentes bases :

Pour effectuer des opérations dans différentes bases on développe les deux nombres dans la base 10 ; on effectue

L'opération et on écrit le résultat dans la base demandée.
Exemple : effectuer dans la base 9
$\overline{6432}_{(7)} \times \overline{54}_{(8)}$
Solution : $\overline{6432}_{(7)} \times \overline{54}_{(8)} =$
$= (6 \times 7^3 + 4 \times 7^2 + 3 \times 7 + 2) \times (5 \times 8 + 4)$
$= 100188$
$= 1 \times 9^5 + 6 \times 9^4 + 2 \times 9^3 + 3 \times 9^2 + 8 \times 9 + 0$
$= \overline{162380}_{(9)}$

IV) CRITERES DE DIVISIBILITE DES NOMBRES 5,25,3,9,11 ET 4

Théorème :
Soit x un entier naturel non nul tel que :
$x \equiv a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + \dots + a_1 10^1 + a_0$ où $0 \le a_i \le 9$; on a :
1) $x \equiv 0\ [5] \Leftrightarrow a_0 = 0$ ou $a_0 = 5$
2) $x \equiv 0\ [25] \Leftrightarrow \overline{a_1 a_0} \in \{0,25,50,75\}$
3) $x \equiv 0\ [3] \Leftrightarrow \sum_{i=0}^{n} a_i \equiv 0\ [3]$
4) $x \equiv 0\ [9] \Leftrightarrow \sum_{i=0}^{n} a_i \equiv 0\ [9]$
5) $x \equiv 0\ [11] \Leftrightarrow \sum_{i=0}^{n} (-1)^i a_i \equiv 0\ [11]$
6) $x \equiv 0\ [4] \Leftrightarrow \overline{a_1 a_0} \equiv 0\ [4]$

V) L'ENSEMBLE $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ OU p EST UN NOMBRE PREMIER.

Théorème : Pour tous entiers relatifs non nuls a et n : $a \wedge n = 1 \Leftrightarrow (\exists m \in \mathbb{Z})(am = 1\ [n])$
Preuve : ($\Rightarrow$) On suppose que : $a \wedge n = 1$, alors d'près T. Bézout $(\exists (m, u) \in \mathbb{Z}^2)(ma + un = 1)$
Donc : $(\exists (m, u) \in \mathbb{Z}2)(un = 1 - ma)$
donc $n | ma - 1$ et finalement : $am = 1\ [n]$
($\Leftarrow$) On suppose que : $(\exists m \in \mathbb{Z})(am = 1\ [n])$ donc $n | (am - 1)$ donc $(\exists k \in \mathbb{Z})(am - 1 = kn)$
donc : $am - kn = 1$ et d'après T. Bézout inverse $a \wedge n = 1$
Théorème : Si p est un nombre premier positif alors tout élément $\overline{x} \neq \overline{0}$ admet un inverse dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$
Preuve : Soit p un nombre premier positif ; on pose : $E = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} - \{\overline{0}\}$
$\overline{x} \in E \Leftrightarrow (\exists \alpha \in \{1,2, \dots, p-1\}) / \overline{x} = \overline{\alpha}$
(p étant, premier donc p ne divise aucun nombre de l'ensemble $\{1,2, \dots, p-1\}$ d'où $p \wedge \alpha = 1$
Et d'après la propriété précédente :
$(\exists y \in \mathbb{Z}^*)(y\alpha \equiv 1[p])$
donc : $\overline{y} \times \overline{\alpha} = \overline{1}$ et comme $\overline{x} = \overline{\alpha}$ donc : $\overline{y} \times \overline{x} = \overline{1}$

VI)Exercices :

Exercice36 : soit p un nombre premier positif et $a \in \mathbb{N}^*$ et $p \wedge a = 1$ on pose $F_p(a) = \frac{a^{p-1} - 1}{p}$
1)verifier que : $F_p(a) \in \mathbb{N}$
2) soit $b \in \mathbb{N}^*$ tel que : $p \wedge b = 1$
Démontrer que : $F_p(ab) \equiv F_p(a) + F_p(b)[p]$
Solution :1) on a **:** $p \wedge a = 1$ et p un nombre premier donc : d'après le théorème de Fermat :
$a^{p-1} - 1 \equiv 0[p]$ donc : $p / a^{p-1} - 1$
Donc : $F_p(a) \in \mathbb{N}$
2) d'après le théorème de Fermat :
$a^{p-1} - 1 \equiv 0[p]$ et $b^{p-1} - 1 \equiv 0[p]$
Donc : $(a^{p-1} - 1)(b^{p-1} - 1) \equiv 0[p^2]$
Donc : $(ab)^{p-1} - a^{p-1} - b^{p-1} + 1 \equiv 0[p^2]$
Donc : $(ab)^{p-1} - 1 \equiv (a^{p-1} - 1) + (b^{p-1} - 1)[p^2]$
Donc : $\frac{(ab)^{p-1} - 1}{p} \equiv \frac{a^{p-1} - 1}{p} + \frac{b^{p-1} - 1}{p}[p]$
Donc : $F_p(ab) \equiv F_p(a) + F_p(b)[p]$

Exercice37 : soit $n \in \mathbb{Z}$ on pose :
$u_n = 5n^7 + 7n^5 + 23n$
1) Démontrer que : $u_n \equiv 0[5]$
2) Démontrer que : $u_n \equiv 0[7]$
3)en déduire que : $\frac{n^7}{7} + \frac{n^5}{5} + \frac{23n}{35} \in \mathbb{Z}$
Solution :1)
on a **:** 5est un nombre premier donc : d'après le théorème de Fermat : $n^5 \equiv n[5]$
et on a **:** $5n^7 \equiv 0[5]$ et $7n^5 \equiv 7n \equiv 2n[5]$
et $23n \equiv 3n[5]$
donc : $u_n = 5n^7 + 7n^5 + 23n \equiv 0[5]$
2) on a **:** 7 est un nombre premier donc : d'après le théorème de Fermat : $n^7 \equiv n[7]$
et on a **:** $5n^7 \equiv 5n[7]$ et $7n^5 \equiv 0[7]$
et $23n \equiv 2n[7]$ donc $u_n \equiv 7n[5]$
donc : $u_n \equiv 0[7]$
3) on a : $5 / u_n$ et $7 / u_n$ et $5 \wedge 7 = 1$
Donc : $5 \times 7 / u_n$ cad $35 / u_n$
Donc : $\frac{u_n}{35} \in \mathbb{Z}$ donc : $\frac{5n^7 + 7n^5 + 23n}{35} \in \mathbb{Z}$

donc : $\frac{n^7}{7}+\frac{n^5}{5}+\frac{23n}{35}\in\mathbb{Z}$

Exercice38 : Considérons dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E): $x^4+781=3y^4$

1)monter que : $\forall x\in\mathbb{Z}$: $x^4\equiv 1[5]$ou $x^4\equiv 0[5]$

2) monter que : $\forall x\in\mathbb{Z}$: $x^4+781\equiv 2[5]$

Ou $x^4+781\equiv 1[5]$

3) en déduire les solutions de l'équation(E)

Solution : 1)on a **:** 5 est un nombre premier donc : a)si 5 ne divise pas x alors :d'après le théorème de Fermat : $x^4\equiv 1[5]$

b)si 5 divise x alors :d'après le théorème de Fermat : $x^4\equiv 0[5]$

donc : $\forall x\in\mathbb{Z}$: $x^4\equiv 1[5]$ou $x^4\equiv 0[5]$

2) on a : $\forall x\in\mathbb{Z}$: $x^4\equiv 1[5]$ou $x^4\equiv 0[5]$

Donc : $\forall x\in\mathbb{Z}$: $x^4+781\equiv 2[5]$ou $x^4+781\equiv 1[5]$

3)on a : $\forall y\in\mathbb{Z}$: $y^4\equiv 1[5]$ou $y^4\equiv 0[5]$

Donc : $3y^4\equiv 0[5]$ou $3y^4\equiv 3[5]$

Mais on a :

$\forall x\in\mathbb{Z}$: $\begin{cases}x^4+781\equiv 1[5]\\3y^4\equiv 0[5]\end{cases}$ou $\begin{cases}x^4+781\equiv 2[5]\\3y^4\equiv 3[5]\end{cases}$

Donc : $\forall x\in\mathbb{Z}$ et $\forall y\in\mathbb{Z}$ $x^4+781\neq 3y^4$

Donc : $S=\varnothing$

Exercice39 :soit dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation suivante: (E) : $36x-25y=5$

1)montrer que si $(x;y)$ est une solution de l'équation(E) alors $x$est un multiple de 5

2)déterminer une solution particulière de l'équation(E)et résoudre (E)

3) soit $(x;y)$ une solution de l'équation(E)

Et $x\wedge y=d$ .Déterminer les valeurs possibles de d et Déterminer les solutions $(x;y)$de (E) tel que $x\wedge y=1$

Solution : 1)$(x;y)\in S\Leftrightarrow$ $36x-25y=5$

$\Leftrightarrow 36x=5(1+5y)\Rightarrow 5/36x$

Or on sait que : $5\wedge 36=1$

Donc d'après le théorème de Gauss : $5/x$

Donc $x$est un multiple de 5

Donc : $\exists x'\in\mathbb{Z}$: $x=5x'$

2)déterminons une solution particulière de l'équation(E) ?

On a : $36x-25y=5$ $\Leftrightarrow 36\times 5x'-25y=5$

$\Leftrightarrow 36x'-5y=1$

On remarque que : $(1;7)$ est une solution particulière de l'équation : $36x'-5y=1$

Donc : $(5;7)$ est une solution particulière de l'équation (E)

$(x;y)\in S\Leftrightarrow 36x-25y=5$ et $36\times 5-25\times 7=5$

x	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$
x^2	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{4}$	$\overline{9}$	$\overline{5}$	$\overline{3}$	$\overline{3}$	$\overline{5}$	$\overline{9}$	$\overline{4}$	$\overline{1}$

$\Leftrightarrow 36(x-5)=25(y-7)$

On a donc : $36/25(y-7)$Et puisque : $25\wedge 36=1$

Alors : $36/y-7$ Donc :

$\exists k\in\mathbb{Z}/y-7=36k\Leftrightarrow\exists k\in\mathbb{Z}/y=36k+7$

$(E)\Leftrightarrow\begin{cases}36(x-5)=25(y-7)\\\exists k\in\mathbb{Z}/y=36k+7\end{cases}$

$\begin{cases}x-5=25k\\\exists k\in\mathbb{Z}/y=36k+7\end{cases}\Leftrightarrow\exists k\in\mathbb{Z}/\begin{cases}x=25k+5\\\exists k\in\mathbb{Z}/y=36k+7\end{cases}$

Inversement : $(25k+5;36k+7)$est solution de l'équation (E)

Donc $S=\{(25k+5;36k+7)/k\in\mathbb{Z}\}$

3)soit $(x;y)\in S$ déterminons : $x\wedge y=d$

On a : $\exists k\in\mathbb{Z}/x=25k+5$ et $y=36k+7$

Et on a : $\begin{cases}d/x\\d/y\end{cases}\Rightarrow d/36x-25y=5$

Donc : $d=1$ ou $d=5$

Si $d=5$ alors $5/y=7+36k$ car $5/x$

Donc : $7+36k\equiv 0[5]$ cad $2+k\equiv 0[5]$ cad $k\equiv 3[5]$

Si $d=1$ alors $k\equiv 4[5]$ou$k\equiv 2[5]$ ou$k\equiv 1[5]$ ou$k\equiv 0[5]$ donc :

$k=4+5\alpha$ ou $k=2+5\alpha$ ou $k=1+5\alpha$ ou $k=5\alpha$

Avec : $\alpha\in\mathbb{Z}$

Donc : $(x;y)\in S$ et $x\wedge y=1$ ssi

$(x;y)\in\{(125\alpha+30;180\alpha+43);(125\alpha+55;180\alpha+79);$
$(125\alpha+105;180\alpha+151);(125\alpha+5;180\alpha+7);\alpha\in\mathbb{Z}\}$

Exercice40: on pose $A=\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$

1)soit $a\in A$ discuter suivant $a$le nombre de solutions de l'équation : (E) $x^2=a$ dans A

2)soient p et $q$deux éléments de A

On considére l'équation : (F) $x^2-\overline{2}px+q=\overline{0}$

Montrer que l'équation : (E)admet une solution ssi p^2-q appartient à un ensemble Bà déterminer

3)application :

a)résoudre dans A l'équation: $x^4+\bar{3}x^2+\bar{4}=\bar{0}\ (G)$

b)déterminer les nombres entiers naturels b

Tels que : 11 divise $\overline{10304}_{(b)}$

Solution :1) On Dresse une table comme suite :

l'équation : (E) admet une solution unique dans A si $a=0$

l'équation : (E) admet deux solution différentes dans A si $a\in\{\bar{1};\bar{3};\bar{4};\bar{5};\bar{9}\}$

l'équation : (E) n'admet pas de solution dans A si $a\in\{\bar{2};\bar{6};\bar{7};\bar{8};\overline{10}\}$

2) $x\in A$;(F) $x^2-\bar{2}px=(x-p)^2-p^2$

$x^2-\bar{2}px+q=\bar{0}\Leftrightarrow(x-p)^2=p^2-q$

l'équation : (F) admet une solution dans A ssi $p^2-q\in\{\bar{0};\bar{1};\bar{3};\bar{4};\bar{5};\bar{9}\}$ donc : $B=\{\bar{0};\bar{1};\bar{3};\bar{4};\bar{5};\bar{9}\}$

3) a)résoudre dans A l'équation : $x^2+\bar{3}x+\bar{4}=\bar{0}$ (G) ?

$x^4+\bar{3}x^2+\bar{4}=\bar{0}\Leftrightarrow X^2+\bar{3}X+\bar{4}=\bar{0}$ avec : $X=x^2$

$\Leftrightarrow X^2-\bar{8}X+\overline{16}=\bar{0}$ car $\bar{4}=\overline{15}$ et $\bar{3}=-\bar{8}$

$\Leftrightarrow\left(X-\bar{4}\right)^2=\bar{1}\Leftrightarrow X-\bar{4}=\bar{1}$ ou $X-\bar{4}=\overline{10}$

$(G)\Leftrightarrow X=\bar{5}$ ou $X=\bar{3}$

$\Leftrightarrow x^2=\bar{5}$ ou $x^2=\bar{3}$

$\Leftrightarrow x=\bar{4}$ ou $x=\bar{7}$ ou $x=\bar{5}$ ou $x=\bar{6}$

Donc : l'ensemble des solutions de (G) est :

$S=\{\bar{4};\bar{5};\bar{6};\bar{7}\}$

3)b)déterminons les nombres entiers naturels b

Tels que : 11 divise $\overline{10304}_{(b)}$?

On a : $\overline{10304}_{(b)}=b^4+3b^2+4$

$11 / \overline{10304}_{(b)}\Leftrightarrow b^4+3b^2+4\equiv0[11]$

$\Leftrightarrow\bar{b}^4+\bar{3}\bar{b}^2+\bar{4}=\bar{0}$ dans A

$\Leftrightarrow\bar{b}\in\{\bar{4};\bar{5};\bar{6};\bar{7}\}$

$\Leftrightarrow\bar{b}\in\bar{4}\cup\bar{5}\cup\bar{6}\cup\bar{7}\Leftrightarrow b=11k+r$ et $r\in\{4;5;6;7\}$

Et $k\in\mathbb{N}$

Exercice41

1) Montrer pour tout entier naturel n, non nul : n^3-n est divisible par 3.

2) Soit p un nombre premier différent de 2, démontrer que $N=\sum_{k=0}^{p-2}2^k$ est divisible par p .

Solution :

1. Le corollaire du théorème de Fermat affirme :

Pour tout entier naturel a et tout nombre premier p , on a: $a^p\equiv a[p]$

Donc $a^p-a\equiv0[p]$, c'est à dire a^p-a est divisible par p .

$n\in\mathbb{N}^*$ et 3 est un nombre premier donc n^3-n est divisible par 3.

Remarques : on peut aussi justifier par une factorisation ou un raisonnement par récurrence.

2) $N=2^0+2^1+2^2+\ldots+2^{p-2}$

est la somme des (p−1) premiers termes de la suite géométrique de raison 2 et de premier terme $2^0=1$

Donc: $N=\dfrac{1-2^{p-1}}{1-2}=2^{p-1}-1$

p est un nombre premier différent de 2 donc p est premier avec 2.

On utilise le théorème de Fermat: 2^{p-1} est divisible par p

Par suite : N est divisible par p.

Exercice42 : Le corollaire du théorème de Fermat affirme :

Pour tout entier naturel a et tout nombre Premier p, on a: $a^p\equiv a[p]$

La réciproque est-elle vraie ?

C'est à dire si pour tout entier naturel a , on a $a^p\equiv a[p]$ (avec p entier naturel supérieur ou égal à 2) alors a-t-on p premier ?

On se propose de donner un contre-exemple.

1. Décomposer 561 en produit de facteurs premiers.
2. Démontrer que si x est un entier alors, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, (x^n-1) est un multiple de $(x-1)$
3. Démontrer que $a^{561}-a$ est divisible par 3 puis par 11, puis par 17.
4. En déduire que pour tout entier naturel a : $a^{561}-a\equiv0[561]$

Solution :1) $561=3\times11\times17$

2) $x^n-1=(x-1)\,(x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+1)$

Si x est un entier alors :

$x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+1$ est un entier et $x-1$ est un entier.

Conséquence : (x^n-1) est un multiple de $(x-1)$

Remarque : on peut aussi effectuer un raisonnement par récurrence pour justifier le résultat)

3) $a^{561}-a=a\left(a^{560}-1\right)$

On considère la décomposition de 560 en produit de facteurs premiers :$560=2^4\times5\times7$

560 a donc 5×2×2=20 diviseurs de 560

D_{560}={1;2;4;5;7;8;10;14;16;20;28;35;40;56;70;80; 140;280;560}

560=2×280 donc : $a^{560}=\left(a^2\right)^{280}$

On pose x=a^2 et n=280

$a^{560}-1$ est un multiple de a^2-1. Donc il existe K ∈ℕ tel que: $a^{560}-1=(a^2-1)K$

Par suite, $a^{561}-a=a(a^{560}-1)$

$a^{561}-a=a(a^2-1)K$ donc $a^{561}-a=(a^3-a)K$

Or a^3-a est divisible par 3

Donc, $a^{561}-a$ est divisible par 3

a560=$(a^{10})^{56}$ On pose x=a^{10} et n=56

$a^{560}-1$ est un multiple de $a^{10}-1$.

Donc il existe K ' ∈ℕ tel que: $a^{560}-1=(a^{10}-1)K'$

Par suite,$a^{561}-a=a(a^{560}-1)$

$a^{561}-a=a(a^{10}-1)K'$ donc $a^{561}-a=(a^{11}-a)K'$

Or $a^{11}-a$ est divisible par 11

Donc, $a^{561}-a$ est divisible par 11

$a^{560}=(a^{16})^{35}$

On pose x=a^{16} et n=35

$a^{560}-1$ est un multiple de $a^{16}-1$.

Donc il existe K ''∈ℕ tel que :

$a^{560}-1=(a^{16}-1)K''$

Par suite $a^{561}-a=a(a^{560}-1)$

$a^{561}-a=a(a^{16}-1)K''$ donc $a^{561}-a=(a^{17}-a)K''$

Or $a^{17}-a$ est divisible par 17

Donc, $a^{561}-a$ est divisible par 17

4) 3; 11 et 17 sont trois nombres premiers donc premiers entre eux 2 à 2.

$a^{561}-a$ est divisible par 3; 11 et 17.

Donc $a^{561}-a$ est divisible par 3×11×17=561

Par suite: $a^{561}-a\equiv 0[561]$

$a^{561}\equiv a[561]$ et pourtant 561 n'est pas un nombre premier.

Donc la réciproque du corollaire du théorème de Fermat n'est pas vraie.

Exercice43 : On suppose qu'il existe des entiers naturels non nuls m , n et a tels que:

(4 m+ 3)(4 n+ 3)=4 a^2+ 1

1) Soit p un nombre premier quelconque divisant 4 m+ 3 .

Montrer que p est impair et que :

$(2a)^p-1\equiv(-1)^{\frac{p-1}{2}}[p]$

2) En utilisant le théorème de Fermat, montrer que : $p\equiv 1[4]$

3. En utilisant la décomposition de 4 m+ 3 en facteurs premiers obtenir une contradiction

Solution :1) $4m\equiv 0[2]$ donc $4m+3\equiv 3[2]$

donc $4m+3\equiv 1[2]$

4 m+ 3 n'est pas divisible par 2 donc p≠2 et donc p est impair.

p est impair donc p=2 q+ 1 avec q∈ℕ

p est un diviseur de 4 m+ 3

4 m+ 3 est un diviseur de 4 a^2+ 1

Donc p est un diviseur de 4 a^2+ 1

Par suite : $4a^2+1\equiv 0[p]$ donc $4a^2\equiv -1[p]$

donc $(2a)^2\equiv -1[p]$ donc $(2a)^{2q}\equiv(-1)^q[p]$

Or, $2q\equiv p-1$ donc $q\equiv\frac{p-1}{2}$

On a donc : $(2a)^p-1\equiv(-1)^{\frac{p-1}{2}}[p]$

2) Pour pouvoir utiliser le théorème de Fermat, on doit vérifier que p et 2a sont premiers entre eux.

p étant un nombre premier il suffit de vérifier que p n'est pas un diviseur de 2a.

On suppose que $2a\equiv 0[p]$

On a alors $4a^2\equiv 0[p]$ et donc $4a^2+1\equiv 1[p]$

Or, on a vu dans la question précédente que : $4a^2+1\equiv 0[p]$

Donc p n'est pas un diviseur de 2a et p et 2a sont premiers entre eux

D'après le théorème de Fermat : $(2a)^{p-1}\equiv 1[p]$

Or d'après la première question :

$(2a)^p-1\equiv(-1)^{\frac{p-1}{2}}[p]$

On a donc: $(-1)^{\frac{p-1}{2}}\equiv 1[p]$

Cela signifie que $\frac{p-1}{2}$ est un nombre pair.

Or $q\equiv\frac{p-1}{2}$ Donc q est un nombre pair.

Il existe q' ∈ℕ tel que q=2 q'

p=2 q+ 1 donc p=4 q'+ 1 et donc : $p\equiv 1[4]$

3) 4 m+ 3= $p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}...p_m^{\alpha_m}\equiv 1[p]$

p_1 ; p_2 ;.... : p_m sont des nombres premiers distincts.et $\alpha_1;\alpha_2;\dots;\alpha_m$ sont des entiers naturels non nuls.

p_1 ; p_2 ;.... : p_m sont des nombres premiers qui divisent 4 m+ 3

D'après la question précédente :

$p_1\equiv 1[4]$ et $p_2\equiv 1[4]$ et ...... et $p_m\equiv 1[4]$

Donc : $p_1^{\alpha_1}\equiv 1[4]$; $p_2^{\alpha_2}\equiv 1[4]$... $p_m^{\alpha_m}\equiv 1[4]$

Par suite : $p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}...p_m^{\alpha_m}\equiv 1[4]$

$4m+3\equiv 1[4]$

Or, $4m\equiv 0[4]$ donc : $4m+3\equiv 3[4]$

Il y a contradiction, il n'existe pas des entiers naturels non nuls m , n et a tels que:

(4 m+ 3)(4 n+ 3)=4 a^2+ 1

Exercice44 : Démontrer que pour tout entier naturel non nul n on a $N=n^{13}-n$ est divisible par 13; 7; 5; 3 et 2.

Solution :

13 est un nombre premier, donc d'après le corollaire du théorème de Fermat :
$n^{13}-n$ est divisible par 13.
$n^{13}-n=n(n^{12}-1)$
$12=2^2\times 3$ donc :Le nombre 12 à 6 diviseurs
$D_{12}=\{1\ ;2\ ;3;4;6;12\}$
$n^{13}-n=n(n^{12}-1)=n(n^6-1)(n^6+1)=(n^7-n)(n^6+1)$
7 est un nombre premier, donc d'après le corollaire du théorème de Fermat :
n^7-n est divisible par 7.
Par suite, $n^{13}-n$ est divisible par 7.
$n^{13}-n=n(n^{12}-1)=n[(n^4)^3-1]$
On utilise le résultat de l'exercice précédent :
$n[(n^4)^3-1]$est un multiple de n^4-1
Donc il existe $K\in\mathbb{N}$ tel que : $(n^4)^3-1=(n^4-1)K$
$n^{13}-n=n(n^{12}-1)=n[(n^4)^3-1]=n(n^4-1)K=(n^5-n)K$
5 est un nombre premier, donc d'après le corollaire du théorème de Fermat : n^5-n est divisible par 5. Par suite, $n^{13}-n$ est divisible par 5
$n^{13}-n=n(n^{12}-1)=n[(n^2)^6-1]$
On utilise le résultat de l'exercice précédent :
$(n^2)^6-1$ est un multiple de n^2-1 .
Donc il existe $K'\in\mathbb{N}$ tel que : $(n^2)^6-1=(n^2-1)K'$
$n^{13}-n=n(n^{12}-1)=(n^3-n)K'$
3 est un nombre premier, donc d'après le corollaire du théorème de Fermat : n^3-n est divisible par 3.
Par suite, $n^{13}-n$ est divisible par 3.
$n^{13}-n=n(n^{12}-1)$
On utilise le résultat de l'exercice précédent :
$n^{12}-1$ est un multiple de $n-1$
Donc il existe $K''\in\mathbb{N}$ tel que: $n^{12}-1=(n-1)K''$
$n^{13}-n=n(n^{12}-1)=n(n-1)K''=(n^2-n)K''$
2 est un nombre premier, donc d'après le corollaire du théorème de Fermat : n^2-n est divisible par 2.
Par suite, $n^{13}-n$ est divisible par 2.

« C'est en forgeant que l'on devient forgeron »
Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs
et exercices
Que l'on devient un mathématicien