

Suites: Limites & récurrence - Correction des exercices

Exercice 1 Déterminer dans chacun des cas la limite de la suite (u_n) :

$$a) u_n = \frac{2n+1}{n+325} = \frac{2n \left(1 + \frac{1}{2n}\right)}{n \left(1 + \frac{365}{n}\right)} = 2 \frac{1 + \frac{1}{2n}}{1 + \frac{365}{n}} \text{ avec, } \left. \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{2n}\right) = 1 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{365}{n}\right) = 1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{soit, par produit et} \\ \text{quotient des limites :} \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2 \end{array}$$

$$b) u_n = \frac{2n^2 - 3n + 2}{1 - n} = 2n \frac{1 + \frac{3}{2n} + \frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n} - 1} \text{ avec, } \left. \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow +\infty} 2n = +\infty \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{3}{2n} + \frac{1}{n^2}\right) = 1 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n} - 1\right) = -1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{soit, par produit et} \\ \text{quotient des limites :} \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty \end{array}$$

$$c) u_n = \frac{4n^2 + 1}{n(2n + 1)} = \frac{4n^2 \left(1 + \frac{1}{4n^2}\right)}{n \times 2n \left(1 + \frac{1}{2n}\right)} = 2 \frac{1 + \frac{1}{4n^2}}{1 + \frac{1}{2n}} \text{ avec, } \left. \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{4n^2}\right) = 1 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{2n}\right) = 1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{soit, par produit et} \\ \text{quotient des limites :} \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2 \end{array}$$

$$d) u_n = \frac{3}{2\sqrt{n} + 17} \text{ avec, } \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = +\infty, \text{ et donc, } \lim_{n \rightarrow +\infty} (2\sqrt{n} + 17) = +\infty, \text{ d'où, } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0.$$

$$e) u_n = \frac{\sqrt{3n+1}}{3 + \sqrt{n}} = \frac{\sqrt{3n \left(1 + \frac{1}{3n}\right)}}{\sqrt{n} \left(\frac{3}{\sqrt{n}} + 1\right)} = \frac{\sqrt{3}\sqrt{n} \sqrt{\left(1 + \frac{1}{3n}\right)}}{\sqrt{n} \left(\frac{3}{\sqrt{n}} + 1\right)} = \sqrt{3} \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{3n}}}}{\frac{3}{\sqrt{n}} + 1}$$

avec, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3n}}\right) = 1$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{3n}}} = 1$, et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{\sqrt{n}} + 1\right) = 1$.

Ainsi, par produit et quotient des limites, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \sqrt{3}$.

$$f) u_n = \frac{\sqrt{n^2 + n + 2}}{\sqrt{n^2 - n - 1}} = \frac{\sqrt{n^2 \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2}\right)}}{\sqrt{n^2 \left(1 - \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}\right)}} = \frac{\sqrt{n^2} \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2}}}{\sqrt{n^2} \sqrt{1 - \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}}} = \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2}}}{\sqrt{1 - \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}}}$$

avec, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2}} = 1$ et, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{1 - \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}} = 1$, d'où, par quotient des limites, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$.

g) $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$. Lorsque $n \rightarrow +\infty$, on est face à une forme indéterminée du type " $+\infty - \infty$ ".

On peut alors penser (et doit penser!) à utiliser la quantité conjuguée pour changer cette soustraction :

$$u_n = \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{(n+1) - n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

On a alors, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n+1} = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = +\infty$, d'où, par addition des limites,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n+1} + \sqrt{n}) = +\infty \text{ et enfin, } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = 0.$$

h) $u_n = \sqrt{n^2 + n} - n$: on peut commencer par essayer de procéder de la même façon en utilisant la quantité conjuguée,

$$u_n = \frac{(\sqrt{n^2+n}-n)(\sqrt{n^2+n}-n)}{\sqrt{n^2+n}+n} = \frac{(n^2+n)-n^2}{\sqrt{n^2+n}+n} = \frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n},$$

mais on se retrouve encore face à une forme indéterminée " $\frac{+\infty}{+\infty}$ ".

On doit alors factoriser par le terme prépondérant :

$$u_n = \frac{\frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n}}{\frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n}} = \frac{\frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n}}{\frac{n}{\sqrt{n^2\left(1+\frac{1}{n}\right)+n}}} = \frac{\frac{n}{\sqrt{n^2}\sqrt{1+\frac{1}{n}}+n}}{\frac{n}{n\sqrt{1+\frac{1}{n}}+n}} = \frac{\frac{n}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}}{\frac{n}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}}$$

$$\text{soit, } u_n = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}.$$

On a alors, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1$, et donc, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1\right) = 2$, d'où, par quotient des

limites, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{1}{2}$.

Rappel : Schéma général d'une démonstration par récurrence :

On cherche à montrer par récurrence, pour tout entier n , la propriété \mathcal{P}_n .

Initialisation : On vérifie que \mathcal{P}_0 est vraie, c'est-à-dire que la propriété est vraie au rang $n = 0$.

Hérédité : Supposons que pour un entier n , la propriété \mathcal{P}_n soit vraie.

On montre alors, en utilisant cette hypothèse (dite hypothèse de récurrence), que la propriété \mathcal{P}_{n+1} est encore vraie.

Conclusion : On vient donc de montrer, d'après le principe de récurrence que, pour tout entier n , la propriété \mathcal{P}_n est vraie.

Exercice 2 Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$ et, pour tout entier n , $u_{n+1} = 5u_n + 4$.

Montrer que, pour tout entier n , $u_n > 0$.

Montrons par récurrence que, pour tout entier n , $u_n > 0$.

Initialisation : $u_0 = 2$ et donc $u_0 > 0$, et la propriété est donc vraie au rang $n = 0$.

Hérédité : Supposons que pour un entier n , on ait $u_n > 0$.

On a alors, $5u_n > 0 \implies 5u_n + 4 > 4$, c'est-à-dire $u_{n+1} > 4 > 0$.

La propriété est donc encore vraie au rang $(n + 1)$.

Conclusion : On vient donc de montrer, d'après le principe de récurrence, que pour tout entier n , $u_n > 0$.

Exercice 3 Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = -3$ et, pour tout entier n , $u_{n+1} = 5 - 4u_n$.

Montrer que, pour tout entier n , $u_n = (-4)^{n+1} + 1$.

Montrons par récurrence que, pour tout entier n , $u_n = (-4)^{n+1} + 1$.

Initialisation : $u_0 = -3$.

Or, pour $n = 0$, $(-4)^{0+1} + 1 = (-4)^1 + 1 = -4 + 1 = -3$, et on a donc pour $u_0 = (-4)^{0+1} + 1$.

La propriété est donc vraie au rang $n = 0$.

Hérédité : Supposons que pour un entier n on ait $u_n = (-4)^{n+1} + 1$.

Alors, $u_{n+1} = 5 - 4u_n = 5 - 4((-4)^{n+1} + 1)$, d'après l'hypothèse de récurrence.

Ainsi, $u_{n+1} = 5 - 4(-4)^{n+1} - 4 = 5 + (-4)^{n+2} - 4 = 1 + (-4)^{n+1}$, ce qui montre que la propriété est encore vraie au rang $(n + 1)$.

Conclusion : On vient donc de montrer, d'après le principe de récurrence, que pour tout entier n ,
 $u_n = (-4)^{n+1} + 1$.

Exercice 4 Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et, pour tout entier n , $u_{n+1} = \frac{u_n + 1}{u_n + 2}$.
Montrer que, pour tout entier n , $0 < u_n < 1$.

Montrons par récurrence que, pour tout entier n , $0 < u_n < 1$.

Initialisation : $u_0 = \frac{1}{2}$, et donc $0 < u_0 < 1$, et la propriété est vraie au rang $n = 0$.

Hérédité : Supposons que pour un entier n on ait $0 < u_n < 1$.

Alors, d'une part $1 < u_n + 1 < 2$, et d'autre part $2 < u_n + 2 < 3 \implies \frac{1}{3} < \frac{1}{u_n + 2} < \frac{1}{2}$.

En multipliant ces deux inégalités, on obtient alors $\frac{1}{3} < \frac{u_n + 1}{u_n + 2} < \frac{2}{2}$, et on a donc $0 < u_{n+1} < 1$:
la propriété est donc encore vraie au rang $(n + 1)$.

Conclusion : On vient donc de montrer, d'après le principe de récurrence, que pour tout entier n ,
 $0 < u_n < 1$.

Exercice 5 Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, $\sum_{k=1}^n k \times k! = (n + 1)! - 1$.

Montrons par récurrence que, pour tout entier $n \geq 1$, $\sum_{k=1}^n k \times k! = (n + 1)! - 1$.

Initialisation : Pour $n = 1$, $\sum_{k=1}^1 k \times k! = 1 \times 1! = 1$, et $(1 + 1)! - 1 = 2! - 1 = 2 - 1 = 1$.

Ainsi, la propriété est vraie au rang $n = 1$.

Hérédité : Supposons que pour un entier n on ait $\sum_{k=1}^n k \times k! = (n + 1)! - 1$.

Alors, $\sum_{k=1}^{n+1} k \times k! = \left(\sum_{k=1}^n k \times k! \right) + (n + 1) \times (n + 1)! = ((n + 1)! - 1) + (n + 1) \times (n + 1)!$ d'après
l'hypothèse de récurrence.

Ainsi, $\sum_{k=1}^{n+1} k \times k! = (n + 1)! + (n + 1) \times (n + 1)! - 1 = (n + 1)! (1 + (n + 1)) - 1 = (n + 1)! (n + 2) - 1$.

Or, $(n + 1)! (n + 2) = (n + 2)!$, et on a donc $\sum_{k=1}^{n+1} k \times k! = (n + 2)! - 1 = ((n + 1) + 1)! - 1$, ce qui
montre que la propriété est encore vraie au rang $(n + 1)$.

Conclusion : On vient donc de montrer, d'après le principe de récurrence, que pour tout entier n ,

$$\sum_{k=1}^n k \times k! = (n + 1)! - 1.$$

Exercice 6 Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$.
Calculer u_2 , u_3 et u_4 : $u_2 = 5u_1 - 6u_0 = 4$; $u_3 = 5u_2 - 6u_1 = 8$; $u_4 = 5u_3 - 6u_2 = 16$.

Démontrer que, pour tout entier n , $u_n = 2^n$.

Montrons par récurrence que, pour tout entier n , $u_n > 0$.

Initialisation : $u_0 = 2$ et donc $u_0 = 2^0$. De même $u_1 = 2 = 2^1$.

La propriété est donc vraie au rang $n = 0$ et $n = 1$.

Hérédité : Supposons que pour un entier n , on ait $u_n = 2^n$ et $u_{n+1} = 2^{n+1}$.

On a alors, $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n = 5 \times 2^{n+1} - 6 \times 2^n$, d'après l'hypothèse de récurrence.

Ainsi, $u_{n+2} = 2^n(5 \times 2 - 6) = 2^n \times 4 = 2^n \times 2^2 = 2^{n+2}$, ce qui montre que la propriété est donc encore vraie au rang $(n + 2)$.

Conclusion : On vient donc de montrer, d'après le principe de récurrence, que pour tout entier n , $u_n = 2^n$.

Remarque : Dans cette démonstration par récurrence, on a fait une hypothèse de récurrence qui porte sur 2 rangs successifs : n et $(n + 1)$, et qui montre que la propriété se transmet au rang suivant $(n + 2)$.

Ainsi, la propriété est vraie au rang $n = 0$ et $n + 1 = 1$ (d'après l'initialisation), et elle donc vraie au rang $n + 2 = 2$.

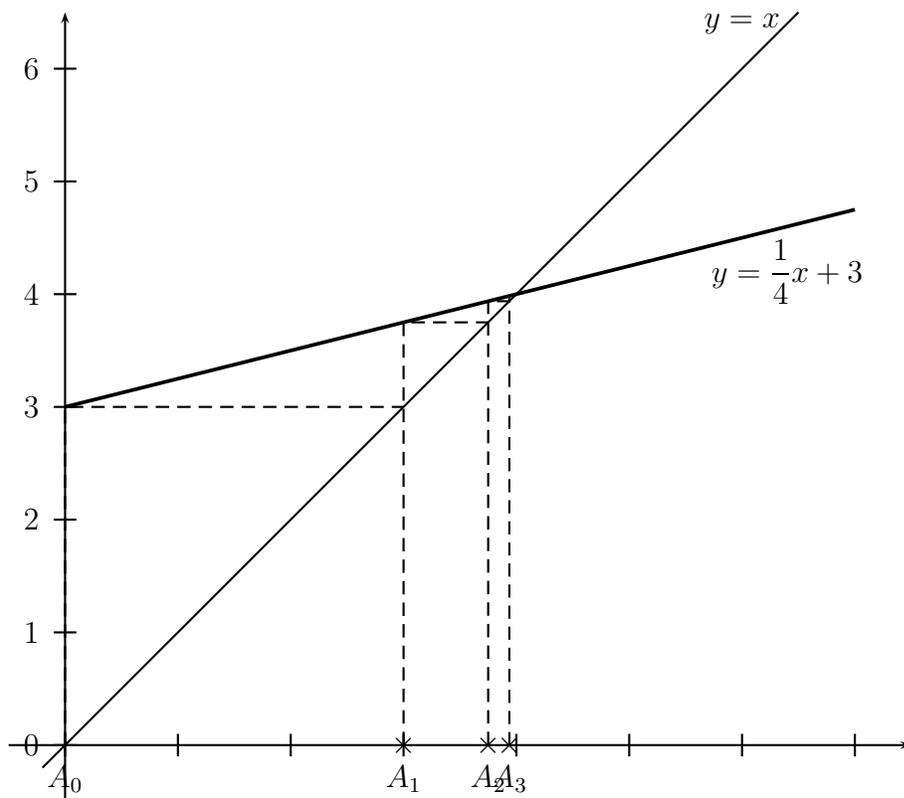
Ensuite, comme elle est vraie au rang $n = 1$ et $n + 1 = 2$, elle est donc aussi vraie au rang $n + 2 = 3$.

Puis elle est vraie au rang $n = 2$ et $n + 1 = 3$, donc aussi au rang $n + 2 = 4$.

...

Exercice 7 Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier n , $u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + 3$.

1. Tracer dans un repère la courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{4}x + 3$, puis placer les points A_0, A_1, A_2 et A_3 d'ordonnée nulle et d'abscisse respective u_0, u_1, u_2 et u_3 .



2. Montrer que, pour tout entier n , $u_n \leq 4$.

Montrons par récurrence que, pour tout entier n , $u_n \leq 4$.

Initialisation : $u_0 = 1$, et donc $u_0 \leq 4$, et la propriété est donc vraie au rang $n = 0$.

Hérédité : Supposons que pour un entier n on ait $u_n \leq 4$.

Alors, $\frac{1}{4}u_n \leq \frac{1}{4} \times 4 = 1$, et donc, $\frac{1}{4}u_n + 3 \leq 1 + 3 = 4$.

Ainsi, $u_{n+1} \leq 4$, et la propriété est encore vraie au rang $(n + 1)$.

Conclusion : On vient de démontrer d'après le principe de récurrence que, pour tout entier n , $u_n \leq 4$.

3. Montrer par récurrence que la suite (u_n) est croissante.

Montrons par récurrence que, pour tout entier n , $u_n \leq u_{n+1}$.

Initialisation : $u_0 = 1$, et $u_1 = \frac{1}{4}u_0 + 3 = \frac{13}{4}$, et donc $u_0 \leq u_1$, et la propriété est donc vraie au rang $n = 0$.

Hérédité : Supposons que pour un entier n on ait $u_n \leq u_{n+1}$.

Alors, $\frac{1}{4}u_n \leq \frac{1}{4}u_{n+1}$, d'où, $\frac{1}{4}u_n + 3 \leq \frac{1}{4}u_{n+1} + 3$, c'est-à-dire $u_{n+1} \leq u_{n+2}$.

Ainsi la propriété est encore vraie au rang $(n + 1)$.

Conclusion : On vient de démontrer d'après le principe de récurrence que, pour tout entier n , $u_n \leq u_{n+1}$, et donc que la suite (u_n) est croissante.

4. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

La suite (u_n) est croissante et majorée par 4, elle converge donc vers une limite l .

Exercice 8 Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 3$ et, pour tout entier n , $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 3}$.

1. Calculer les quatre premiers termes de la suite, et conjecturer le sens de variation de la suite (u_n) .
Démontrer cette conjecture.

$$u_1 = \sqrt{u_0 + 1} = \sqrt{3 + 1} = 2; \quad u_2 = \sqrt{u_1 + 1} = \sqrt{3} \simeq 1,73;$$

$$u_3 = \sqrt{u_2 + 1} = \sqrt{\sqrt{3} + 1} \simeq 1,65; \quad u_4 = \sqrt{u_3 + 1} = \sqrt{\sqrt{\sqrt{3} + 1} + 1} \simeq 1,61;$$

Comme $u_0 > u_1 > u_2 > u_3 > u_4$, on peut conjecturer que la suite (u_n) est décroissante.

Montrons par récurrence que, pour tout entier n , $u_n > u_{n+1}$.

Initialisation : La propriété est vraie pour les rangs $n = 0$ à $n = 3$ d'après les calculs précédents.

Hérédité : Supposons que pour un entier n on ait $u_n > u_{n+1}$.

Alors, $u_n + 1 > u_{n+1} + 1$, et donc, $\sqrt{u_n + 1} > \sqrt{u_{n+1} + 1}$, car la fonction racine carrée $x \mapsto \sqrt{x}$ est croissante sur \mathbb{R}_+ .

Ainsi, $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1} > \sqrt{u_{n+1} + 1} = u_{n+2}$, et la propriété est encore vraie au rang $n + 1$.

Conclusion : On vient de montrer que, d'après le principe de récurrence, pour tout entier n , $u_n > u_{n+1}$, c'est-à-dire que la suite (u_n) est décroissante.

2. Montrer que, pour tout entier n , $0 < u_n < 3$.

Par une récurrence immédiate, comme $u_0 = 1 > 0$, et comme si $u_n > 0$, alors $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1} > 0$, on sait donc que pour tout entier n , $u_n > 0$.

De plus, comme $u_0 = 1 < 3$ et que la suite (u_n) est décroissante, on a donc, pour tout entier n , $u_n < u_0 < 3$.

On a donc bien au final, pour tout entier n , $0 < u_n < 3$.

3. En déduire que la suite (u_n) est convergente vers une limite l .

La suite (u_n) est donc décroissante et minorée par 0, elle converge donc vers une limite $l \geq 0$.

4. Déterminer l .

La limite l de la suite vérifie nécessairement $l = \sqrt{l+1}$ (point fixe),

$$\text{soit } l \geq 0 \text{ et } l^2 = l + 1 \iff l^2 - l - 1 = 0 \iff \left(l = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \text{ ou } l = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)$$

Comme $l = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} < 0$, la limite de la suite (u_n) (car on sait qu'elle en a une) est $l = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

Exercice 9 Soit (u_n) la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \text{pour tout entier } n, u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + n - 2 \end{cases}$.

1. Calculer u_1 , u_2 et u_3 .

$$u_1 = \frac{1}{3}u_0 + 0 - 2 = \frac{1}{3} - 2 = -\frac{5}{3};$$

$$u_2 = \frac{1}{3}u_1 + 1 - 2 = -\frac{5}{9} - 1 = -\frac{13}{9};$$

$$u_3 = \frac{1}{3}u_2 + 2 - 2 = -\frac{4}{27};$$

2. Montrer que, pour tout $n \geq 4$, $u_n \geq 0$.

Montrons par récurrence que, pour tout $n \geq 4$, $u_n \geq 0$.

Initialisation : $u_4 = \frac{1}{3}u_3 + 3 - 2 = -\frac{4}{81} + 1 = \frac{77}{81} > 0$, et la propriété est vraie au rang $n = 4$.

Hérédité : Supposons que pour un entier $n \geq 4$ on ait $u_n \geq 0$.

Alors, $\frac{1}{3}u_n \geq 0$, et donc, $\frac{1}{3}u_n + n - 2 \geq 0 + n - 2 \geq 0 + 4 - 2$, car $n \geq 4$.

Ainsi, $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + n - 2 \geq 2 \geq 0$, et la propriété est encore vraie au rang $n + 1$.

Conclusion : On vient donc de démontrer que, d'après le principe de récurrence, pour tout entier $n \geq 4$, $u_n \geq 0$.

3. En déduire que, pour tout $n \geq 5$, $u_n \geq n - 3$.

Pour tout entier $n \geq 5$, $u_n = \frac{1}{3}u_{n-1} + (n - 1) - 2 = \frac{1}{3}u_{n-1} + n - 3$.

Or, comme $n \geq 5$, on a donc $n - 1 \geq 4$, et alors, d'après la question précédente, $u_{n-1} \geq 0$.

Ainsi, $u_n = \frac{1}{3}u_{n-1} + n - 3 \geq 0 + n - 3$.

On a donc, pour tout entier $n \geq 5$, $u_n \geq n - 3$.

4. En déduire la limite de la suite (u_n) .

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n - 3) = +\infty$, on en déduit, d'après le corolaire du théorème des gendarmes, que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

Exercice 10 Soit, pour tout entier n , $u_n = \frac{\cos(n)}{n+1}$.

Montrer que pour tout entier n , $-\frac{1}{n+1} \leq u_n \leq \frac{1}{n+1}$, puis en déduire la limite de la suite (u_n) .

Pour tout entier n , on a $-1 \leq \cos(n) \leq 1$.

Ainsi, en multipliant ces inégalités par $\frac{1}{n+1} > 0$, on obtient $-\frac{1}{n+1} \leq u_n \leq \frac{1}{n+1}$.

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{1}{n+1} = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$, on en déduit donc, d'après le théorème des gendarmes, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$

Exercice 11 Soit, pour tout entier n , $u_n = \frac{n + (-1)^n}{n^2 + 1}$.

Montrer que pour tout entier n , $\frac{n-1}{n^2+1} \leq u_n \leq \frac{n+1}{n^2+1}$, puis en déduire la limite de la suite (u_n) .

On a $(-1)^n = 1$ lorsque n est pair, et $(-1)^n = -1$ lorsque n est impair.

Ainsi, pour tout entier n , $-1 \leq (-1)^n \leq 1$, soit aussi $n-1 \leq n + (-1)^n \leq n+1$, puis, multipliant par $\frac{1}{n+1} > 0$, on obtient $\frac{n-1}{n^2+1} \leq u_n \leq \frac{n+1}{n^2+1}$.

$$\text{On a } \frac{n-1}{n^2+1} = \frac{n \left(1 - \frac{1}{n}\right)}{n^2 \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)} = \frac{1}{n} \frac{1 - \frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n^2}}.$$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1$, et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) = 1$, et donc, par produit et quotient des limites, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n-1}{n^2+1} = 0$.

$$\text{De même, } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{n^2+1} = 0.$$

Ainsi, d'après le théorème des gendarmes, on a donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

Exercice 12 Soit, pour tout entier n , $u_n = \frac{(-1)^n + n}{(-1)^n + 2}$.

Montrer que pour tout entier n , $u_n \geq \frac{n-1}{3}$, puis en déduire la limite de la suite (u_n) .

Pour tout entier n , $(-1)^n + n \geq -1 + n$,
et $(-1)^n + 2 \leq 1 + 2 = 3$, d'où $\frac{1}{(-1)^n + 2} \geq \frac{1}{3}$.

Ainsi, en multipliant ces deux inégalités, on obtient : $u_n = \frac{(-1)^n + n}{(-1)^n + 2} \geq \frac{n-1}{3}$,

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n-1}{3} = +\infty$, on en déduit, d'après le corollaire du théorème des gendarmes, que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

Exercice 13 Soit la suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}\sqrt{u_n^2 + 12}$.

1. Déterminer les cinq premiers termes de cette suite.

Quel semble être la limite de (u_n) ?

$$u_1 = \frac{1}{2}\sqrt{u_0^2 + 12} = \frac{1}{2}\sqrt{12} = \sqrt{3} \simeq 1,732;$$

$$u_2 = \frac{1}{2}\sqrt{u_1^2 + 12} = \frac{1}{2}\sqrt{15} \simeq 1,94;$$

$$u_3 = \frac{1}{2}\sqrt{u_2^2 + 12} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{15}{4} + 12} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{63}{4}} = \frac{3\sqrt{7}}{4} \simeq 1,984;$$

$$u_4 = \frac{1}{2}\sqrt{u_3^2 + 12} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{63}{16} + 12} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{255}{16}} = \frac{\sqrt{255}}{8} \simeq 1,996$$

$$u_5 \simeq 1,999$$

La suite (u_n) semble converger vers 2.

2. Montrer que la suite (v_n) définie par $v_n = u_n^2 - 4$ est géométrique.

$$v_{n+1} = u_{n+1}^2 - 4 = \left(\frac{1}{2}\sqrt{u_n^2 + 12}\right)^2 - 4 = \frac{1}{4}(u_n^2 + 12) - 4 = \frac{1}{4}u_n^2 + 1 = \frac{1}{4}(u_n^2 + 4) = \frac{1}{4}v_n$$

Ainsi, la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{4}$.

3. En déduire la limite de la suite (v_n) puis celle de la suite (u_n) .

Comme $-1 < \frac{1}{4} < 1$, on en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$.

De plus $v_n = u_n^2 - 4 \iff u_n = \sqrt{v_n + 4}$ ou $u_n = -\sqrt{v_n + 4}$.

Comme $u_n \geq 0$ (car u_n est définie par une racine carrée), on a donc $u_n = \sqrt{v_n + 4}$, et donc,
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \sqrt{0 + 4} = 2$.

On a ainsi démontré la conjecture sur la limite de (u_n) faite à la question 1.

Exercice 14 Soit (u_n) la suite définie par $\begin{cases} u_0 \geq -3 \\ u_{n+1} = \sqrt{3 + u_n} \end{cases}$

Quelle valeur de u_0 faut-il prendre pour que la suite (u_n) soit stationnaire ?

Une suite stationnaire est une suite constante : pour tout entier n , $u_{n+1} = u_n = u_{n-1} = \dots = u_1 = u_0$.

Ainsi, la suite est stationnaire si, $u_1 = u_0 \iff \sqrt{3 + u_0} = u_0 \iff 3 + u_0 = u_0^2$ et $u_0 \geq 0$.

On doit donc avoir ainsi $u_0^2 - u_0 - 3 = 0$ soit, en résolvant l'équation du second degré, $u_0 = \frac{1 - \sqrt{13}}{2}$

ou $u_0 = \frac{1 + \sqrt{13}}{2}$.

Comme $\frac{1 - \sqrt{13}}{2} < 0$, on doit donc nécessairement avoir $u_0 = \frac{1 + \sqrt{13}}{2}$.

Exercice 15 On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 5$ et, pour tout entier n , $3u_{n+1} = u_n + 4$.

1. Calculer u_1 et u_2 .

$$3u_1 = u_0 + 4 = 9 \iff u_1 = 3; \quad 3u_2 = u_1 + 4 = 7 \iff u_2 = \frac{7}{3}$$

2. Démontrer que, pour tout entier n , $u_n \geq 2$.

Montrons par récurrence que, pour tout entier n , $u_n \geq 2$.

Initialisation : La propriété est vraie pour les rangs $n = 0$, $n = 1$ et $n = 2$ d'après ce qui précède.

Hérédité : Supposons que pour un entier n on ait $u_n \geq 2$.

Alors, $u_n + 4 \geq 2 + 4 = 6$, et donc $3u_{n+1} \geq 6 \iff u_{n+1} \geq \frac{6}{3} = 2$.

Ainsi, la propriété est encore vraie au rang $n + 1$.

Conclusion : On a donc démontré, d'après le principe de récurrence, que pour tout entier n , $u_n \geq 2$.

3. Montrer que (u_n) est une suite décroissante.

On peut montrer que (u_n) est décroissante par récurrence, en montrant que pour tout entier n , $u_{n+1} \leq u_n$.

On peut aussi le montrer directement :

Pour tout entier n , $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + \frac{4}{3}$, et donc,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}u_n + \frac{4}{3} - u_n = -\frac{2}{3}u_n + \frac{4}{3}.$$

Or, pour tout entier n , $u_n \geq 2$, et ainsi, $-\frac{2}{3}u_n \leq -\frac{4}{3}$, d'où, $u_{n+1} - u_n = -\frac{2}{3}u_n + \frac{4}{3} \leq -\frac{4}{3} + \frac{4}{3} = 0$.

Ainsi, pour tout entier n , $u_{n+1} - u_n \leq 0 \iff u_{n+1} \leq u_n$: la suite (u_n) est donc décroissante.

4. Montrer que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

D'après ce qui précède, la suite (u_n) est décroissante et minorée par 2, elle converge donc vers une limite $l \geq 2$.

Cette limite l satisfait de plus nécessairement l'équation $3l = l + 4$ (point fixe), soit $l = 2$.

Ainsi, la suite (u_n) converge vers $l = 2$.

5. On pose, pour tout entier n , $v_n = u_n - 2$.

Montrer que (v_n) est une suite géométrique.

En déduire l'expression de v_n en fonction de n .

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 2 = \frac{1}{3}u_n + \frac{4}{3} - 2 = \frac{1}{3}u_n - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}(u_n - 2) = \frac{1}{3}v_n.$$

La suite (v_n) est donc géométrique de raison $\frac{1}{3}$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 2 = 3$.

On en déduit que, pour tout entier n , $v_n = v_0 q^n = 3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{3^{n-1}}$.

6. Soit $S_n = \sum_{k=0}^n v_k = v_0 + v_1 + \dots + v_n$ et $T_n = \sum_{k=0}^n u_k = u_0 + u_1 + \dots + u_n$.

Déterminer l'expression de S_n , puis de T_n , en fonction de n .

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^n v_k = v_0 + v_1 + \dots + v_n \\ &= 3 + 3 \left(\frac{1}{3}\right) + 3 \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \dots + 3 \left(\frac{1}{3}\right)^n \\ &= 3 \left[\left(\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{3}\right)^n \right] \\ &= 3 \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{3}} = 3 \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{\frac{2}{3}} = \frac{9}{2} \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right) \end{aligned}$$

Pour tout entier n , $v_n = u_n - 2 \iff u_n = v_n + 2$, et donc,

$$\begin{aligned}
T_n &= \sum_{k=0}^n u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_n \\
&= (v_0 + 2) + (v_1 + 2) + \cdots + (v_n + 2) \\
&= (v_0 + v_1 + \cdots + v_n) + (2 + 2 + \cdots + 2) \\
&= S_n + (n + 1) \times 2 = \frac{9}{2} \left(1 - \left(\frac{1}{3} \right)^{n+1} \right) + 2(n + 1)
\end{aligned}$$

7. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n$.

Comme $-1 < \frac{1}{3} < 1$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3} \right)^n = 0$, et donc, $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{9}{2}$.

De plus, $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2(n + 1) = +\infty$, et donc, par addition des limites, $\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n = +\infty$.

Exercice 16 Soit la suite numérique (u_n) définie sur \mathbb{N}^* par $u_n = \frac{n(n+2)}{(n+1)^2}$.

1. a. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = 1 - \frac{1}{(n+1)^2}$.

$$\text{Pour tout entier } n > 0, 1 - \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{(n+1)^2 - 1}{(n+1)^2} = \frac{n^2 + 2n}{(n+1)^2} = \frac{n(n+2)}{(n+1)^2} = u_n.$$

b. Prouver que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 < u_n < 1$.

Pour tout entier $n > 0$, $n + 2 \geq 2 > 0$, et donc, $n(n + 2) > 0$.

De plus $(n + 1)^2 \geq 1^2 > 0$, et on a donc $u_n = \frac{n(n+2)}{(n+1)^2} > 0$.

De même (en cherchant à utiliser le résultat de la question précédente), $\frac{1}{(n+1)^2} > 0$, soit

$$-\frac{1}{(n+1)^2} < 0, \text{ et donc, } u_n = 1 - \frac{1}{(n+1)^2} < 1.$$

Au final, on a bien, pour tout entier $n > 0$, $0 < u_n < 1$.

c. Étudier le sens de variation de la suite (u_n) .

$$\begin{aligned}
\text{Pour tout entier } n > 0, u_{n+1} - u_n &= \left(1 - \frac{1}{(n+2)^2} \right) - \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2} \right) \\
&= -\frac{1}{(n+2)^2} + \frac{1}{(n+1)^2} \\
&= \frac{-(n+1)^2 + (n+2)^2}{(n+2)^2(n+1)^2} \\
&= \frac{2n+3}{(n+2)^2(n+1)^2}
\end{aligned}$$

Or, pour tout entier $n > 0$, $2n + 3 > 3 > 0$, et $(n + 2)^2(n + 1)^2 > 0$,

d'où, $u_{n+1} - u_n > 0 \iff u_{n+1} > u_n$.

La suite (u_n) est donc décroissante.

Remarque : Il y a bien sûr quantité d'autres raisonnements que l'on peut mener pour arriver à cette conclusion :

• Ecrire $u_n = f(n)$ avec $f : x \mapsto 1 - \frac{1}{(x+1)^2}$ et étudier le sens de variation de f .

- Procéder par encadrements successifs en partant de $n + 1 < n + 2$ pour arriver à $u_n > u_{n+1}$
- Conjecturer le sens de variation de (u_n) en calculant les premiers termes, puis démontrer cette conjecture avec un raisonnement par récurrence
- ...

2. On pose $x_n = u_1 \times u_2 \times \dots \times u_n$

a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n = \frac{n+2}{2(n+1)}$

Montrons par récurrence que, pour tout entier $n > 0$, $x_n = \frac{n+2}{2(n+1)}$.

Initialisation : $x_1 = u_1 = \frac{1(1+2)}{(1+1)^2} = \frac{3}{4}$ et $\frac{1+2}{2(1+1)} = \frac{3}{4}$

La propriété est donc vraie au rang $n = 1$.

Hérédité : Supposons que pour un entier n on ait $x_n = \frac{n+2}{2(n+1)}$.

Alors, $x_{n+1} = \underbrace{u_1 \times u_2 \times u_3 \times \dots \times u_n}_{x_n} \times u_{n+1} = x_n \times u_{n+1}$

et donc, avec $u_{n+1} = \frac{(n+1)(n+3)}{(n+2)^2}$,

$x_{n+1} = \frac{n+2}{2(n+1)} \times \frac{(n+1)(n+3)}{(n+2)^2} = \frac{n+3}{2(n+2)} = \frac{(n+1)+2}{2((n+1)+1)^2}$ et la propriété est encore vraie au rang $n+1$.

Conclusion : On a donc démontré, d'après le principe de récurrence, que pour tout entier $n > 0$, $x_n = \frac{n+2}{2(n+1)}$.

b. Déterminer la limite de la suite (x_n) .

$$x_n = \frac{n+2}{2(n+1)} = \frac{n \left(1 + \frac{2}{n}\right)}{2n \left(1 + \frac{1}{n}\right)} = \frac{1}{2} \frac{1 + \frac{2}{n}}{1 + \frac{1}{n}}$$

avec, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right) = 1$, et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1$, d'où, par produit et quotient des limites,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \frac{1}{2}.$$