PRODUIT SCALAIRE de l'espace

Leçon : PRODUIT SCALAIRE dans l'espace
Présentation globale

La notion de produit scalaire est apparue pour les besoins de la physique. Le concept relativement récent et a été introduit au milieu du XIXe siècle par le mathématicien allemand *Hermann Grassmann* (1809 ; 1877), ci-contre.
Il fut baptisé produit scalaire par *William Hamilton* (1805 ; 1865) en 1853.

1) Le produit scalaire de deux vecteurs l'espace

Définition 1 :Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace. Et soient A ; B et C trois points l'espace tel que : $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$
le produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans l'espace est le produit scalaire de $\overrightarrow{AB}$ par $\overrightarrow{AC}$ dans le plan ABC, noté $\vec{u}.\vec{v}$

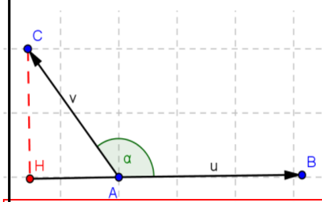
remarques: 1) $\vec{u}.\vec{v}$ est un **nombre réel** définit par
Si $\vec{u}=\vec{0}$ ou $\vec{v}=\vec{0}$ alors $\vec{u}.\vec{v}=0$
Si $\vec{u}\neq\vec{0}$ et $\vec{v}\neq\vec{0}$ alors soit H le projeté orthogonal de C sur la droite (AB) et alors

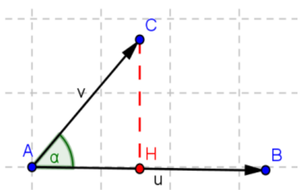
$\vec{u}.\vec{v}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\overline{AH}\times\overline{AB}$ c a d

$\vec{u}.\vec{v}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=AH\times AB$ si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ ont le même sens

$\vec{u}.\vec{v}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=-AH\times AB$ si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ ont un sens contraire

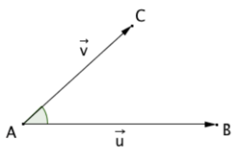
2)toutes les propriétés du produit scalaire dans le plan sont aussi vraies dans l'espace





Définition2 : Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace.
On appelle produit scalaire de $\vec{u}$ par $\vec{v}$, noté $\vec{u}.\vec{v}$, le nombre réel définit par :
- $\vec{u}.\vec{v}=0$, si l'un des deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est nul
- $\vec{u}.\vec{v}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos(\vec{u};\vec{v})$, dans le cas contraire.

$\vec{u}.\vec{v}$ se lit "$\vec{u}$ scalaire $\vec{v}$".



2°Vecteurs orthogonaux

Définition :On dit que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux dans l'espace si $\vec{u}.\vec{v}=0$

Et on écrit : $\vec{u}\perp\vec{v}$

Exemples : Soit ABCDEFGH un cube de côté a

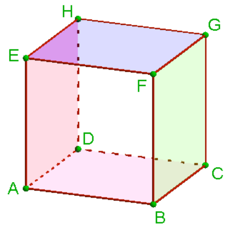
Calculer les produits scalaires suivants :

$\overrightarrow{AF}.\overrightarrow{GC}$; $\overrightarrow{AF}.\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{DH}.\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{EH}.\overrightarrow{GC}$ et $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{DB}$

Réponse :1)calcul de $\overrightarrow{AF}.\overrightarrow{GC}$:on a : $\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{EA}$ car ABCDEFG cube

$\overrightarrow{AF}.\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{AF}.\overrightarrow{EA}=-\overrightarrow{AF}.\overrightarrow{AE}=-AE\times AE=-a^2$

(car E est le projeté orthogonales de F sur (AE)



2)calcul de $\overrightarrow{AF}.\overrightarrow{CD}$:

Puisque ABCD est un carré

on a : $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{BA}$

donc : $\overrightarrow{AF}.\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AF}.\overrightarrow{BA}=-AB\times AB=-a^2$

(car B est le projeté orthogonales de F sur (AB)

3)calcul de $\overrightarrow{DH}.\overrightarrow{DC}$: Puisque DCGH est un carré

on a : $\overrightarrow{DH}.\overrightarrow{DC}=0$ ($\overrightarrow{DH}\perp\overrightarrow{DC}$)

4)calcul de $\overrightarrow{EH}.\overrightarrow{GC}$:

$\overrightarrow{EH}.\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{EH}.\overrightarrow{HD}=0$ ($\overrightarrow{DH}\perp\overrightarrow{EH}$)

donc : $\overrightarrow{EH}\perp\overrightarrow{GC}$

5)calcul de $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{DB}$:

On a : $(AE)\perp(ABC)$ donc $(AE)\perp(DB)$ car $(DB)\subset(ABC)$ donc : $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{DB}=0$

3) Produit scalaire et norme

3-1 Définition: Soit un vecteur $\vec{u}$ de l'espace.et deux points A et B tels que $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$.La norme du vecteur $\vec{u}$, notée $\|\vec{u}\|$ est la distance AB.

$$\|\vec{u}\|=\sqrt{\vec{u}^2}=\sqrt{\vec{u}.\vec{u}}$$

$$\vec{u}^2=\|\vec{u}\|^2=\overrightarrow{AB}^2=AB^2$$

3-2) propriétés

Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ de l'espace., on a

1) $\vec{u}.\vec{v}=\vec{v}.\vec{u}$

2) $\vec{u}.(k\vec{v})=k\vec{u}.\vec{v}$, avec k un nombre réel.

3) $\vec{u}.(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}.\vec{v}+\vec{u}.\vec{w}$

4) $(\vec{u}+\vec{v})^2=\vec{u}^2+2\vec{u}.\vec{v}+\vec{v}^2$

5) $(\vec{u}-\vec{v})^2=\vec{u}^2-2\vec{u}.\vec{v}+\vec{v}^2$

6) $(\vec{u}+\vec{v})(\vec{u}-\vec{v})=\vec{u}^2-\vec{v}^2$

7) $\|\vec{u}\|=0\Leftrightarrow\vec{u}=\vec{0}$

8) $\|k\vec{u}\|=|k|\|\vec{u}\|$

9) $\vec{u}.\vec{v}=\frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-\|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right)$ et

$\vec{u}.\vec{v}=\frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2\right)$

10) $\|\vec{u}+\vec{v}\|\leq\|\vec{u}\|+\|\vec{v}\|$

11) $|\vec{u}.\vec{v}|\leq\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|$

12)Soit A, B et C trois points de l'espace.

On a : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\left(AB^2+AC^2-BC^2\right)$

Application : 1) Soit A , B et C des points de l'espace tel que $AB=\sqrt{5}$ et $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=3$

Calculer $(-2\overrightarrow{AB}).\overrightarrow{BC}$:

$(-2\overrightarrow{AB}).\overrightarrow{BC}=-2\overrightarrow{AB}.(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC})=-2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BA}-2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

$=2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AB}^2-2\times3$

$=2AB^2-2\times3=2\times5-6=4$

2) sachant que $\|\vec{u}\|=2$ et $\|\vec{v}\|=3$ et $\|\vec{u}+\vec{v}\|=5$

Calculer : $\vec{u}.\vec{v}$:

On a : $\vec{u}.\vec{v}=\frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2\right)=\frac{1}{2}\left(5^2-4-9^2\right)=6$

4) repère orthonormé de l'espace base orthonormé de l'espace

Soit O un point de l'espace

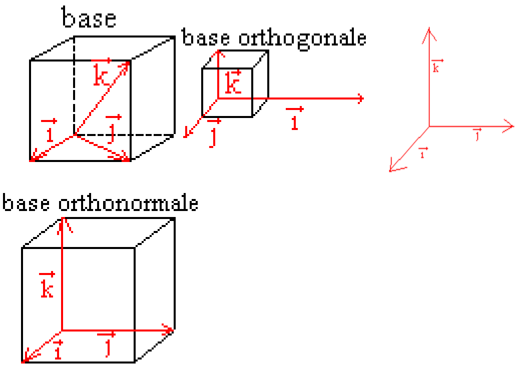
On pose : $\vec{i}=\overrightarrow{OI}$ et $\vec{j}=\overrightarrow{OJ}$ et $\vec{k}=\overrightarrow{OK}$

Définition1 : on dit qu'un triplet $(\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ de vecteur dans l'espace est base orthonormé si et seulement si les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ et $\vec{k}$ sont non coplanaires et normés et orthogonaux deux a deux c a d : $\|\vec{i}\|=1$ et $\|\vec{j}\|=1$ et $\|\vec{k}\|=1$ et $\vec{i}.\vec{j}=0$ et $\vec{j}.\vec{k}=0$ et $\vec{i}.\vec{k}=0$

Définition2 : on dit que $\left(0;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ est un repère orthonormé dans l'espace et seulement si $\left(\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ est une base orthonormé

Exemples :

(La figure représente un cube dans les trois cas)



Coordonnées d'un vecteur relativement à une base :

si $\left(\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ est une base orthonormé et $\vec{u}$ un vecteur de l'espace

Il existe un triplet unique (x ; y ; z) de réels tels que : $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$

Ce triplet (x ; y ; z) est appelé coordonnées du vecteur $\vec{u}$relativement à la base $\left(\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$

Voyons maintenant comment exprimer le produit scalaire dans l'espace à l'aide des coordonnées des vecteurs.

5) analytique du produit scalaire dans l'espace :

$\left(\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ Est une base orthonormé (dans tout ce qui va suivre)

Soient : $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ et $\vec{v}=x'\vec{i}+y'\vec{j}+z'\vec{k}$ deux vecteurs de l'espace

$\vec{u}.\vec{v}=\left(x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}\right)\left(x'\vec{i}+y'\vec{j}+z'\vec{k}\right)$

$\vec{u}.\vec{v}=xx'\vec{i}\vec{i}+yy'\vec{j}\vec{j}+zz'\vec{k}\vec{k}$ car $\vec{i}.\vec{j}=0$ et $\vec{j}.\vec{k}=0$ et $\vec{i}.\vec{k}=0$

$\vec{u}.\vec{v}=xx'+yy'+zz'$ puisque: $\|\vec{i}\|=1$ et $\|\vec{j}\|=1$ et $\|\vec{k}\|=1$

On a donc la propriété suivante :

Propriété :

Dans une base orthonormé on considère deux vecteurs $\vec{u}(x;y;z)$ et $\vec{v}(x';y';z')$ alors :

$\vec{u}.\vec{v}=xx'+yy'+zz'$.

. $\|\vec{u}\|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

Exemple : si, dans un repère orthonormé, on considère les vecteurs $\vec{u}(1;2;3)$ et $\vec{v}(5;-1;4)$ alors

$\vec{u}.\vec{v}=1\times5+2\times(-1)+3\times4=15$

et $\|\vec{u}\|=\sqrt{1^2+2^2+3^2}=\sqrt{14}$.

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé, soient A et B de coordonnées respectives $(x_A;y_A;z_A)$ et $(x_B;y_B;z_B)$

alors

$AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$

L'ensemble $\mathscr{E}$ des points

6) L'ensemble des points dans l'espace tq : $\vec{u}.\overrightarrow{AM}=k$

Propriété :

soit $\vec{u}(a;b;c)$ un vecteur et $A(x_A;y_A;z_A)$ un point de l'espace et $k\in\mathbb{R}$

L'ensemble des points $M(x;y;z)$ dans l'espace tq : $\vec{u}.\overrightarrow{AM}=k$ c'est un plan d'équation qui s'écrit sous la forme : $ax+by+cz+d=0$

Cette équation est appelée équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$.

RPEUVE : $\overrightarrow{AM}(x-x_A;y-y_A;z-z_A)$

$\vec{u}.\overrightarrow{AM}=k\Leftrightarrow a(x-x_A)+b(y-y_A)+c(z-z_A)=k$

$\Leftrightarrow ax+by+cz-(ax_A+by_A+cz_A+k)=0$

L'ensemble des points dans l'espace tq :

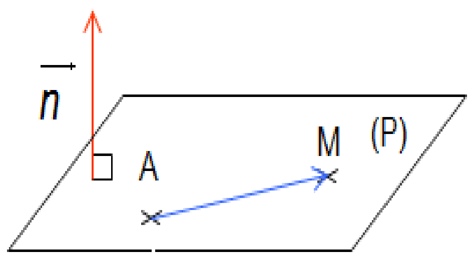
$\vec{u}.\overrightarrow{AM}=k$ c'est un plan d'équation qui s'écrit sous la forme : $ax+by+cz+d=0$ avec :

$d=-(ax_A+by_A+cz_A+k)$

7) Equation cartésienne d'un plan definit par un point et un vecteur normal

Définition :

Un vecteur non nul $\vec{n}$ est dit **normal** au plan $\mathscr{P}$ si, pour tous points A et Mde $\mathscr{P}$, on a $\vec{n}.\overrightarrow{AM}=0$



Remarque : Il existe évidemment une infinité de vecteurs normaux à un plan : ce sont tous les vecteurs colinéaires au vecteur $\vec{n}$.

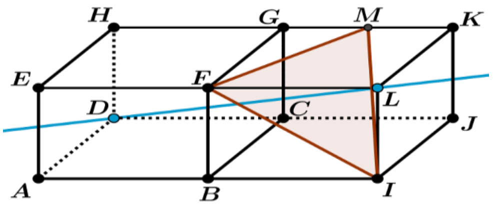
Propriété :

Un vecteur est dit normal à un plan si, et seulement si, il est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de ce plan.
Cette propriété va nous permettre d'une part de vérifier facilement qu'un vecteur est normal à un plan et, d'autre part, de déterminer les coordonnées d'un vecteur normal à un plan.

Démonstration :
La propriété directe découle de la définition. Nous n'allons donc prouver que la réciproque.
Soient $\vec{u}$et $\vec{v}$deux vecteurs non colinéaires d'un plan $\mathscr{P}$, $\vec{w}$un vecteur de $\mathscr{P}$et $\vec{n}$un vecteur orthogonal à $\vec{u}$et $\vec{v}$. Il existe donc deux réels $a$et b tels que $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$.
Ainsi $\vec{w}.\vec{n} = a\vec{u}.\vec{n} + b\vec{v}.\vec{n} = 0$
Le vecteur $\vec{n}$est donc orthogonal à tous les vecteurs du plan $\mathscr{P}$. Il lui est par conséquent orthogonal.

Exemple1 : On souhaite déterminer les coordonnées d'un vecteur $\vec{n}$normal à un plan dirigé par $\vec{u}(2,-1,3)$et $\vec{v}(4,0,2)$.
Ces deux vecteurs ne sont clairement pas colinéaires : une coordonnée est nulle pour l'un mais pas pour l'autre.
On note $\vec{n}(x,y,z)$.
Puisque $\vec{n}$est normal au plan dirigé par $\vec{u}$et $\vec{v}$alors $\vec{u}.\vec{n} = 0$et $\vec{u}.\vec{n} = 0$.
On obtient ainsi les deux équations
$2x - y + 3z = 0$et $4x + 2z = 0$
A l'aide de la deuxième équation, on obtient $z = -2x$. On remplace dans la première :
$2x - y - 6x = 0 \Leftrightarrow -4x - y = 0 \Leftrightarrow y = -4x$.
On choisit, par exemple $x = 1$et on trouve ainsi .
$\vec{v}(1;-4;-2)$
On vérifie : $\vec{u}.\vec{n} = 2 + 4 - 6 = 0$✓et $\vec{v}.\vec{n} = 4 + 0 - 4 = 0$✓.
Un vecteur normal au plan dirigé par les vecteurs $\vec{u}$et $\vec{v}$est $\vec{n}(1;-4;-2)$

Exemple2 : Deux cubes d'arête 1, sont disposés comme indiqué sur la figure.
M est le milieu du segment [GK].
La droite (DL) est-elle perpendiculaire au plan (FMI)?



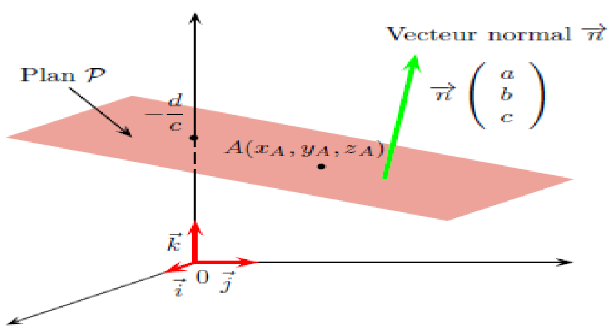
Solution : on se place dans le repère $\left(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AE}\right)$ orthonormé

Voyons si $\overrightarrow{DL}$ est un vecteur normal au plan (FMI)
Il suffit de calculer: $\overrightarrow{DL}\cdot\overrightarrow{FM}$ et $\overrightarrow{DL}\cdot\overrightarrow{FI}$
On a : $\overrightarrow{DL} = -\overrightarrow{AD} + 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE}$ donc : $\overrightarrow{DL}(2;-1;1)$
On a : $\overrightarrow{FM} = \overrightarrow{FG} + \overrightarrow{GM} = \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ donc : $\overrightarrow{FM}\left(\frac{1}{2};1;0\right)$
On a : $\overrightarrow{FI} = \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{BI} = -\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AB}$ donc : $\overrightarrow{FI}(1;0;-1)$
$\overrightarrow{DL}\cdot\overrightarrow{FM} = 0$ et $\overrightarrow{DL}\cdot\overrightarrow{FI} = 1 \neq 0$
Donc : (DL) n'est pas perpendiculaire au plan (FMI)

Exercice1: $ABCDEFGH$ un cube tel que : $AB = 1$ avec I le milieu du segment $[EH]$ et J le milieu de $[EF]$
1)Montrer que $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{EB} = 0$ et que $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{ED} = 0$
2) En déduire que le vecteur $\overrightarrow{EG}$ est normal au plan (BDE)
3) Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{FI}$ et $\overrightarrow{CJ}$ sont orthogonaux
4)l'espace étant rapporté au repère $\left(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AE}\right)$
a) déterminer les coordonnées des points F ; C ; I et J
B)Montrer que $\overrightarrow{FI}\cdot\overrightarrow{CJ} = 0$
et en déduire que $\overrightarrow{FI}$ et $\overrightarrow{CJ}$ sont orthogonaux

Propriété :

Soient a et b et c des réels tous nuls quelconque . L'ensemble (P) des points $M(x;y;z)$ tels que $ax + by + cz + d = 0$ est un plan dont un vecteur normal est $\vec{n}(a;b;c)$.



Exemple1 : On considère le plan d'équation $4x - 2y + 3z - 1 = 0$. Un vecteur normal à ce plan est $\vec{n}(4;-2;3)$. Le point $A(2;-1;-3)$ appartient au plan car : $4\times 2-2\times(-1)+3\times(-3)-1=0$.

Exemple2 : On cherche une équation du plan $\mathscr{P}$ passant par $A(4;2;-3)$ dont un vecteur normal est $\vec{n}(1;-2;-1)$:

Une équation du plan $\mathscr{P}$ est de la forme .
$x-2y-z+d=0$

Le point A appartient au plan. Ses coordonnées vérifient donc l'équation :
$4-2\times 2-(-3)+d=0 \Leftrightarrow 3+d=0 \Leftrightarrow d=-3$

Une équation de $\mathscr{P}$ est donc $x-2y-z-3=0$

Exemple3: $ABCDEFGH$ un cube tel que : $AB=1$ avec I le milieu du segment $[AE]$

On se place dans le repère $\left(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AE}\right)$

1) déterminer un vecteur normal au plan (CHI)

2) En déduire une équation cartésienne du plan (CHI)

Solution :1)soit un $\vec{n}(x;y;z)$ un vecteur normal au plan (CHI) donc $\begin{cases}\vec{n}.\overrightarrow{CH}=0\\ \vec{n}.\overrightarrow{CI}=0\end{cases}$

On a : $\overrightarrow{CH}(-1;0;1)$ et $\overrightarrow{CI}\left(-1;-1;\frac{1}{2}\right)$

Donc : $\begin{cases}-x+z=0\\ -x-y+\frac{1}{2}z=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}z=x\\ -x-y+\frac{1}{2}x=0\end{cases}$

$\begin{cases}z=x\\ y=-\frac{1}{2}x\end{cases}$ Puisque on veut un seul vecteur normal

Alors on donne par exemple : $x=2$ on trouve

$\begin{cases}z=2\\ y=1\end{cases}$ donc un vecteur normal est $\vec{n}(2;-1;2)$

2)l'équation du plan s'écrit sous forme :
$ax+by+cz+d=0$

Donc : $2x-y+2z+d=0$

Et puisque : $C(1;1;0)\in(CIH)$ donc :

$2-1+0+d=0 \Leftrightarrow d=-1$

Donc : (CIH): $2x-y+2z-1=0$

8) positions relatifs de deux plans dans l'espace

Proposition :

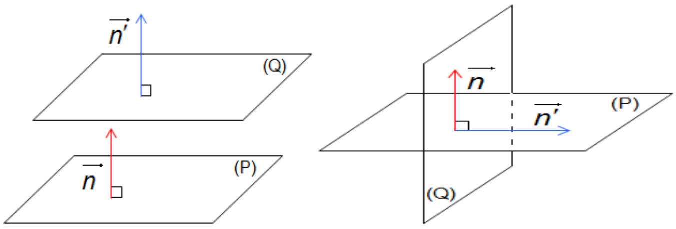
Soient : (P) : $ax+by+cz+d=0$ et $(P)'$: $a'x+b'y+c'z+d'=0$ deux plans dans l'espace

Et $\vec{n}(a;b;c)$ et $\vec{n'}(a';b';c')$ deux vecteurs normaux respectivement a (P) et $(P)'$

1)Les plans (P) et $(P)'$ sont parallèles ssi $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ sont colinéaires

2)Les plans (P) et $(P)'$ sont sécants ssi $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ sont non colinéaires

3)Les plans (P) et $(P)'$ sont perpendiculaires ssi $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ sont orthogonaux



Exemple1 : On considère les plans d'équations :

(P) $2x-4y+z+1=0$ et (P') $x+y+2z-3=0$

1)Monter que : $(P)\perp(P')$

2)Déterminer l'équation cartésienne du plan (Q) parallèle au plan (P) passant par le point $A(1;-1;1)$

Solutions :1) $\vec{n}(2;-4;1)$ et $\vec{n'}(1;1;2)$ les deux vecteurs normaux respectivement de (P) et $(P)'$

On a : $\vec{n}.\vec{n'}=2-4+2=0$

Donc $\vec{n}\perp\vec{n'}$ par suite : $(P)\perp(P')$

2) $(P)\parallel(Q)$ et $\vec{n}$ est normal a (P) donc est un vecteur normal a (Q)

Donc une équation cartésienne du plan (Q) est :
$2x-4y+z+d=0$

Et puisque : $A(1;-1;1)\in(Q)$ donc :

$2+4+1+d=0 \Leftrightarrow d=-7$

Donc : (Q): $2x-4y+z-7=0$

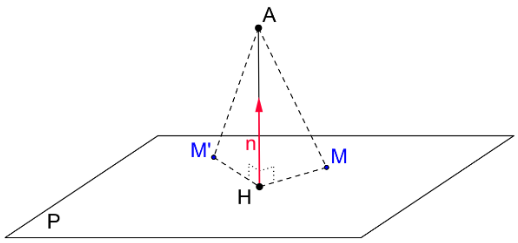
9) distance d'un point à un plan

Proposition :

Soient : $A(x_A;y_A;z_A)$ un point et (P) : $ax+by+cz+d=0$ un plan dans l'espace avec $(a;b;c)\neq(0;0;0)$ et H est le projeté orthogonal de A sur le plan

la distance du point A au plan (P) est la distance AH et on a : $d(A;(P))=\frac{|ax_A+by_A+cz_A+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

Remarque : pour tout point M du plan (P) on a AH $\leq$AM



RPEUVE : $\vec{n}(a;b;c)$ est normal a (P) pour tout point M du plan on a $\vec{n}.\overrightarrow{AM}=\vec{n}.\overrightarrow{AH}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a(x-x_A)+b(y-y_A)+c(z-z_A)=\|\vec{n}\|\times\|\overrightarrow{AH}\|\times\cos(\vec{n};\overrightarrow{AH})$

$\Leftrightarrow ax+by+cz-ax_A-by_A-cz_A=\sqrt{a^2+b^2+c^2}\times\|\overrightarrow{AH}\|\times\cos(\vec{n};\overrightarrow{AH})$

Or $M\in(P)$ donc $ax+by+cz+d=0$

Donc : $ax+by+cz=-d$

$\Leftrightarrow -ax_A-by_A-cz_A=\sqrt{a^2+b^2+c^2}\times\|\overrightarrow{AH}\|\times\cos(\vec{n};\overrightarrow{AH})$

$\Leftrightarrow -ax_A-by_A-cz_A-d=\sqrt{a^2+b^2+c^2}\times\|\overrightarrow{AH}\|\times(\mp1)$

$\Rightarrow|-ax_A-by_A-cz_A-d|=\sqrt{a^2+b^2+c^2}\times AH\times|(\mp1)|$

$$\Rightarrow AH=\frac{|ax_Aby_Acz_A+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

Exercice : L'espace est muni d'un repère orthonormé $(\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.

On considère le plan (P) d'équation $x+2y-z-1=0$

1)Les points A(1;1;2) et B(2;1;1) appartiennent-ils au plan (P) ?

2)Calculer la distance AB puis les distances de ces deux points A et B au plan (P).

3)Le point A est-il le projeté orthogonal de B sur le plan (P) ?

Solution : $1+2\times1-2-1=0$ donc les coordonnées du point A vérifient l'équation de. On en déduit que A appartient au plan (P) et donc que : $2+2\times1-1-1=2\neq0$

donc les coordonnées du point B ne vérifient pas l'équation de (P) On en déduit que B n'est pas un point de (P).

2) $AB=\sqrt{(2-1)^2+1(2-1)^2+(1-2)^2}=\sqrt{2}$

Calculons $d(A;(P))$ et $d(B;(P))$.

On a : $A\in(P)$ donc : $d(A;(P))=0$

$$d(B;(P))=\frac{|2+2\times1-1-1|}{\sqrt{1^2+2^2+(-1)^2}}=\frac{|2|}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$$

on a : $\overrightarrow{AB}(1;0;-1)$

3)Un vecteur normal au plan (P) est $\vec{n}(1;2;-1)$

Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires, donc $\overrightarrow{AB}$ n'est pas orthogonal au plan (P).

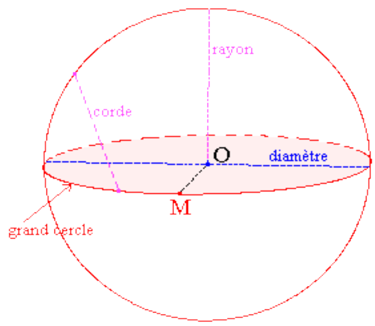
Le point A n'est donc pas le projeté orthogonal de B sur (P) .

10) Etude analytique de LA SPHERE

Dans tout ce qui va suivre, l'espace euclidien $(\mathcal{E})$ est muni d'un repère $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ orthonormé.

10-1) Définition d'une sphère.

Définition : Soit Ω un point dans l'espace $(\mathcal{E})$, R et un réel positif. La sphère de centre Ω et de rayon R est l'ensemble des points M dans $(\mathcal{E})$, tels que $\Omega M = R$



On la note par : $S(\Omega,\ R)$.

$S(\Omega,\ R)=\{M\in\mathcal{E}\ /\ \Omega M=R\}$

10-2) Equation cartésienne d'une sphère.

Soit $\Omega(a,b,c)$ un point dans l'espace et $r\geq0$

$M(x,y,z)\in S(\Omega,\ R)\Leftrightarrow\Omega M=R$

$\Leftrightarrow \Omega M^2 = R^2$

$\Leftrightarrow (x-x_{\Omega})^2+(y-y_{\Omega})^2+(z-z_{\Omega})^2=R^2$

Propriété :

Soit $\Omega(a, b, c)$ un point dans l'espace et $R \geq 0$, la sphère $S(\Omega, R)$ à une équation cartésienne de la forme :$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2 = R^2$ (1)

Exemple :

1)Déterminer l'équation cartésienne de la sphère de centre $\Omega(1, -1, 2)$ et de rayon $R=3$

2)Déterminer l'équation cartésienne de la sphère de centre $\Omega(0, -3, 0)$ et qui passe par $A(2, 1, -1)$.

Solution : 1) l'équation cartésienne de la sphère est : $(x-1)^2+(y-(-1))^2+(z-2)^2=3^2 \Leftrightarrow$

$(x-1)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=9 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-2x+2y-4z-3=0$

2) $S(\Omega, R)$ la sphère de centre $\Omega(1, -2, 0)$ et qui passe par $A(2, 1, -1)$.

Donc : $\Omega A = R$

$= \sqrt{(x_A-x_{\Omega})^2+(y_A-y_{\Omega})^2+(z_A-z_{\Omega})^2}$

$\Omega A = R = \sqrt{2^2+4^2+(-1)^2} = \sqrt{21}$

Donc l'équation cartésienne de la sphère est :

$(x-0)^2+(y-(-3))^2+(z-0)^2=\sqrt{21}^2 \Leftrightarrow$

$x^2+(y+3)^2+z^2=21 \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2+6y-12=0$

10-3) REPRESENTATION PARAMETRIQUE D'UNE SPHERE

Proposition :

Soient : $S(\Omega; R)$ la sphère de centre $\Omega(a;b;c)$ et de rayon R

Le système $\begin{cases} x = a + R\sin\varphi\cos\theta \\ y = b + R\sin\varphi\sin\theta \\ z = c + R\cos\varphi \end{cases} \quad (\varphi;\theta)\in\mathbb{R}^2$

s'appelle une représentation paramétrique du sphère (S)

Exemple1 : Déterminer une représentation paramétrique de la sphère de centre $\Omega(-1, 0, 2)$ et de rayon $R=3$

Solution : Le système $\begin{cases} x = -1 + 3\sin\varphi\cos\theta \\ y = 3\sin\varphi\sin\theta \\ z = 2 + 3\cos\varphi \end{cases}$

$(\varphi;\theta)\in\mathbb{R}^2$ une représentation paramétrique de la sphère

Exemple2 : Déterminer (S) L'ensemble des points $M(x;y;z)$ tels que

$\begin{cases} x = \frac{1}{2} + 2\sin\varphi\cos\theta \\ y = -1 + 2\sin\varphi\sin\theta \quad (\varphi;\theta)\in\mathbb{R}^2 \\ z = 1 + 2\cos\varphi \end{cases}$

Solution :soit $M(x;y;z)\in(S)$

Donc : $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+(y-(-1))^2+(z-1)^2=$

$=(2\sin\varphi\cos\theta)^2+(2\sin\varphi\sin\theta)^2+(2\cos\varphi)^2$

$=4\sin\varphi^2(\cos\theta^2+\sin\theta^2)+4\cos\varphi^2$

Donc : $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+(y-(-1))^2+(z-1)^2=2^2$

(S) L'ensemble des points $M(x;y;z)$ est donc la sphère de centre

$\Omega(1/2, -1, 1)$ et de rayon $R=2$

10-4 L'ensemble (S) des points $M(x;y;z)$ tels que : $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$

Proposition :

Soit : (S) L'ensemble des points $M(x;y;z)$ de l'espace tel que :

$x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$ avec

a ; b ; c et d des réelles

- Si : $a^2+b^2+c^2-d \succ 0$ alors (S) est une sphère de centre $\Omega(a;b;c)$ et de rayon $R=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}$
- Si : $a^2+b^2+c^2-d=0$ alors $S=\{\Omega(a;b;c)\}$
- Si : $a^2+b^2+c^2-d \prec 0$ alors $S=\varnothing$

PREUVE : $M(x;y;z)\in(S)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$

$\Leftrightarrow x^2-2ax+a^2+y^2-2by+b^2+z^2-2cz+c^2+d-a^2-b^2-c^2=0$

$\Leftrightarrow (x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=a^2+b^2+c^2-d=0$

- Si : $a^2+b^2+c^2-d \succ 0$ alors (S) est une sphère de centre $\Omega(a;b;c)$ et de rayon $R=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}$
- Si : $a^2+b^2+c^2-d=0$ alors $S=\{\Omega(a;b;c)\}$
- Si : $a^2+b^2+c^2-d \prec 0$ alors $S=\varnothing$

Exemple : Déterminer (S) L'ensemble des points $M(x;y;z)$ dans les cas suivants :

1) (S_1) : $x^2+y^2+z^2-2x-6y-4z=0$

2) (S_2) : $x^2+y^2+z^2-6x+4y+6z+22=0$

3) (S_3) : $x^2+y^2+z^2-2x+3y+z+7=0$

Solution : 1)soit $a=1$ et $b=3$ et $c=2$ et $d=0$

$a^2+b^2+c^2-d=1+9+4=14$

Puisque $a^2+b^2+c^2-d=14\succ 0$

Donc : L'ensemble des points $M(x;y;z)$ est donc la sphère (S_1) de centre

$\Omega(1, 3,2)$ et de rayon $R=\sqrt{14}$

2) (S_2) : $x^2+y^2+z^2-6x+4y+6z+22=0$

$M(x;y;z)\in(S_2)$

$\Leftrightarrow(x^2-6x)+(y^2+4y)+(z^2+6z)+22=0\Leftrightarrow$

$(x-3)^2+(y+2)^2+(z+3)^2=0$

$\Leftrightarrow x-3=0$ et $y+2=0$ et $z+3=0$

$\Leftrightarrow x=3$ et $y=-2$ et $z=-3$

alors $S_2=\{\Omega(3;-2;-3)\}$

3) (S_3) : $x^2+y^2+z^2-2x+3y+z+7=0$

$M(x;y;z)\in(S_3)$

$\Leftrightarrow(x^2-2x)+(y^2+3y)+(z^2+z)+7=0\Leftrightarrow$

$(x-1)^2+\left(y+\frac{3}{2}\right)^2+\left(z+\frac{1}{2}\right)^2=-\frac{7}{2}$ alors $S_3=\varnothing$

10-5 L'ensemble (S) des points $M(x;y;z)$ tels que : $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0$

Proposition :

Soit : $A(x_A;y_A;z_A)$ et $B(x_B;y_B;z_B)$ deux points de l'espace

L'ensemble (S) des points $M(x;y;z)$ de l'espace tel que : $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0$ est la sphère (S) d'équation cartésienne :

$(x-x_A)(x-x_B)+(y-y_A)(y-y_B)+(z-z_A)(z-z_B)=0$

Avec $[AB]$ un diamètre du sphère (S)

PREUVE : $M(x;y;z)\in(S)\Leftrightarrow\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0$

$\Leftrightarrow(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AI}).(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB})=0\Leftrightarrow(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{IA}).(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA})=0$

($\overrightarrow{IB}=-\overrightarrow{IA}$ Car I le milieu du segment $[AB]$

$M\in(S)\Leftrightarrow MA^2-IA^2=0\Leftrightarrow MA=IA$

Donc (S) est la sphère de centre le milieu du segment $[AB]$ et de rayon : IA

Soient les points : $A(x_A;y_A;z_A)$ et $B(x_B;y_B;z_B)$ et $M(x;y;z)$

$\overrightarrow{MA}(x_A-x;y_A-y;z_A-z)$ et

$\overrightarrow{MB}(x_B-x;y_B-y;z_B-z)$

$M\in(S)\Leftrightarrow\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0\Leftrightarrow$

$(x-x_A)(x-x_B)+(y-y_A)(y-y_B)+(z-z_A)(z-z_B)=0$

C'est l'équation cartésienne de la sphère de diamètre $[AB]$

Exemple : Soit : $A(-1;2;1)$ et $B(1;-1;0)$ deux points de l'espace

Déterminer l'ensemble (S) des points $M(x;y;z)$ de l'espace tel que : $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0$

Solution : $(x+1)(x-1)+(y-2)(y+1)+(z-1)z=0$

$\Leftrightarrow x^2-1+y^2-y-2+z^2-z=0$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-y-z-3=0$

$\Leftrightarrow x^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2+\left(z-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{7}{2}$

Donc (S) est la sphère de centre $\Omega\left(0;\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ et de rayon $R=\sqrt{7/2}$

10-6) L'intersection d'une sphère (S) et une droite (D)

Exemple1 : Soient (S) une sphère :

$(S):(x-1)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=9$

et (D) une droite : $\begin{cases}x=1-t\\ y=1+t\\ z=1+t\end{cases}\quad(t\in\mathbb{R})$

Étudier la position relative de la sphère et la droite

Solution :

$$M(x;y;z)\in(S)\cap(D)\Leftrightarrow \exists t\in\mathbb{R}/\begin{cases}x=1-t\\y=1+t\\z=1+t\\(x-1)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=9\end{cases}$$

Donc : $t^2+t^2+(t-1)^2=9\Leftrightarrow 2t^2-2t-8=0$

$\Leftrightarrow t=2$ ou $t=\dfrac{-4}{3}$

$x=7/3 ; y=-1/3 ; z=-1/3$ ou $x=-1; y=3; z=3$

la droite (D) coupe la sphère (S) en deux points $A\left(\dfrac{7}{3};\dfrac{-1}{3};\dfrac{-1}{3}\right)$ et $B(-1;3;3)$

Exemple2 : Soient (S) une sphère :

$x^2+y^2+z^2-2x-4y+2z=0$

et (D) une droite : $\begin{cases}x=2+3t\\y=4+t\\z=-2+5t\end{cases}\quad (t\in\mathbb{R})$

Étudier la position relative de la sphère et la droite

Solution :

$$M(x;y;z)\in(S)\cap(D)\Leftrightarrow \exists t\in\mathbb{R}/\begin{cases}x=2+3t\\y=4+t\\z=-2+5t\\x^2+y^2+z^2-2x-4y+2z=0\end{cases}$$

Donc :

$(2+3t)^2+(4+t)^2+(-2+5t)^2-2(2+3t)-4(4+t)+2(-2+5t)t-8=0$

$\Leftrightarrow 25t^2=0\quad \Leftrightarrow t=0$ Donc : $x=-2; y=4; z=-2$

la droite (D) coupe la sphère (S) en un seul point $A(2;4;-2)$ on dit que la droite (D) est tangente à (S) en $A(2;4;-2)$

Exemple3 : Soient (S) une sphère :

$x^2+y^2+z^2+2x-2y-1=0$

et (D) une droite : $\begin{cases}x=-1+t\\y=1+2t\\z=2\end{cases}\quad (t\in\mathbb{R})$

Étudier la position relative de la sphère et la droite

Solution :

$$M(x;y;z)\in(S)\cap(D)\Leftrightarrow \exists t\in\mathbb{R}/\begin{cases}x=-1+t\\y=1+2t\\z=2\\x^2+y^2+z^2+2x-2y-1=0\end{cases}$$

Donc : $(-1+t)^2+(1+2t)^2+2^2+2(-1+t)-2(1+2t)-1=0$

$\Leftrightarrow 5t^2+1=0$ Pas de solutions

Donc la droite (D) et la sphère (S) n'ont pas de points en commun, l'intersection est vide.

Proposition :

Soient (D) une droite de l'espace et (S) une sphère de centre O et de rayon R , H le projeté orthogonal du point O sur la droite (D).

Notons d = OH :

Si d > R alors la droite (D) et la sphère (S) n'ont pas de points en commun, l'intersection est vide.

Si d = R alors la droite (D) et la sphère (S) ont un unique point en commun et dans ce cas on dit que la droite (D) est tangente en H à (S)

Si d < R alors la droite (D) et la sphère (S) en deux points en commun A et B symétriques par rapport au point H, dans ce cas on dit que la droite (D) est sécante à (S). (OA = OB = R)

10-7) L'intersection d'une sphère (S) et un plan (P)

Proposition :

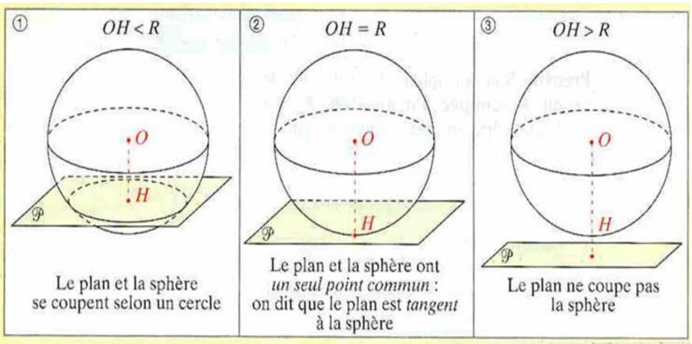
Soient (S) une sphère de centre O et de rayon R, (P) un plan de l'espace, nommons H le projeté orthogonal de O sur le plan (P)

et d = OH, la distance du point O au plan (P).

- Si d > R alors le plan (P) et la sphère (S) n'ont pas de points en commun, l'intersection est vide.

• Si d = R alors le plan (P) et la sphère (S) ont un unique point en commun et dans ce cas on dit que le plan (P) est tangent en H à (S)

• Si d < R alors l'ensemble des points commun au plan (P) et la sphère (S) est le cercle du plan (P) de centre H et de rayon $\sqrt{R^2-d^2}$ (Théorème de Pythagore), dans ce cas on dit le plan (P) est sécant à (S).



Exemple1 : Soient (S) une sphère :

$x^2+y^2+z^2-2x-2y-14=0$

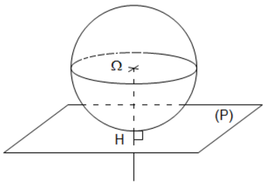
Et le plan d'équation $(P): 2x-y-z+5=0$

Étudier la position relative de la sphère (S) et le plan (P)

Solution : Déterminons le centre et le rayon de la sphère :On a : $x^2+y^2+z^2-2x-2y-14=0$ donc

$(S):(x-1)^2+(y-1)^2+z^2=\sqrt{6}^2$

(S) est donc une sphère de centre $\Omega(1;1;0)$ et de rayon $R=\sqrt{6}$



Et puisque : $d(\Omega;(P))=R=\sqrt{6}$

Alors le plan (P) et la sphère (S) ont un unique point en commun donc le plan (P) est tangent en H à (S)

Déterminons le point de tangence H qui est la projection de Ω sur le plan (P)

Soit $\vec{n}(2;-1;-1)$ Un vecteur normal à ce plan (P)

$$\exists k\in\mathbb{R} / \begin{cases}\overrightarrow{\Omega H}=k\vec{n}\\ H\in(P)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=1+2k\\ y=1-k\\ z=-k\\ 2x-y-z+5=0\end{cases}$$

Donc : $2(1+2k)-(1-k)-(-k)+5=0 \Leftrightarrow k=-1$ Donc :

$x=-1; y=2; z=1$ Donc $H(-1;2;1)$

Exemple2 : Soient (S) une sphère :

$x^2+y^2+z^2-2x+2z+1=0$

Et le plan d'équation $(P): x-y+z-3=0$

Étudier la position relative de la sphère (S) et le plan (P)

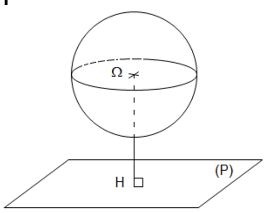
Solution : Déterminons le centre et le rayon de la sphère :On a : $x^2+y^2+z^2-2x+2z+1=0$ donc

$(S):(x-1)^2+y^2+(z+1)^2=1^2$

(S) est donc une sphère de centre $\Omega(1;0;-1)$ et de rayon $R=1$

Et puisque : $d(\Omega;(P))=\frac{|1-0-1-3|}{\sqrt{1+1+1}}=\sqrt{3}\succ R$

Alors le plan (P) et la sphère (S) n'ont pas de points en commun, l'intersection est vide.



$(S)\cap(P)=\varnothing$

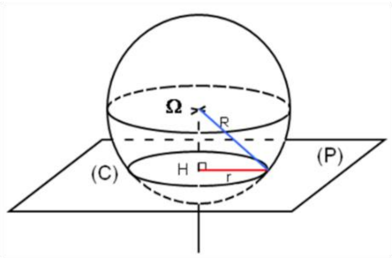
Exemple3 : Soient (S) une sphère :

$(S):(x-2)^2+(y-1)^2+(z+3)^2=9$

Et le plan d'équation $(P): 2x-y+3z-2=0$

Étudier la position relative de la sphère (S) et le plan (P) **Solution :** (S) est donc une sphère de centre $\Omega(2;1;-3)$ et de rayon $R=3$

Et puisque : $d(\Omega;(P))=\frac{|4-1-9-2|}{\sqrt{4+1+9}}=\frac{8}{\sqrt{14}}\prec R$



Alors la sphère (S) coupe le plan (P) suivant un cercle de centre H qui est la projection orthogonal du point Ω sur le plan (P) et de rayon

$r=\sqrt{R^2-d^2}=\sqrt{\dfrac{62}{14}}$

Déterminons le centre $H(x;y;z)$ du cercle

Soit $\vec{n}(2;-1;3)$ Un vecteur normal à ce plan (P)

$$\exists k\in\mathbb{R}/\begin{cases}\overrightarrow{\Omega H}=k\vec{n}\\ H\in(P)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2+2k\\ y=1-k\\ z=-3+3k\\ 2x-y+3z-2=0\end{cases}$$

Donc : $2(2+2k)-(1-k)+3(-3+3k)-2=0$

$\Leftrightarrow k=\dfrac{4}{7}$ Donc : $x=\dfrac{22}{7};y=\dfrac{3}{7};z=-\dfrac{9}{7}$

Donc $H\left(22/7;3/7;-9/7\right)$

10-8) le plan (P) tangent a une sphère (S) en un point :

Proposition :

Soient (S) une sphère de centre Ω et $A\in(S)$

Il existe un plan (P) unique de l'espace tangent a la sphère en A et définie par :

$M\in(P)\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{A\Omega}=0$

Exemple : Soie (S) une sphère :

$(S):x^2+y^2+(z+2)^2=3$

Et soit le point $A(1;-1;-1)$

Vérifier que $A\in(S)$ et Déterminer l'équations cartésienne du plan (P) tangent a la sphère (S) en A

Solution : $1^2+(-1)^2+(-1+2)^2=1+1+1=3$

donc $A\in(S)$

$\Omega(0;0;-2)$ est le centre de la sphère (S) et de rayon $R=3$ Et on a : $\overrightarrow{A\Omega}(-1;1;-1)$

Donc : $M(x;y;z)\in(P)\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{A\Omega}=0$

$\Leftrightarrow-(x-1)+(y+1)-(z+1)=0$

Donc l'équation de : $(P):x-y+z-1=0$

Exercice1: on considère les plans d'équations respectives (P) $x-y+z=0$ et (Q) $2x+3y+z-6=0$

et la sphère (S) de centre $\Omega(1;2;4)$ et tangente au plan (P) et soit la droite (Δ) qui passant par Ω et perpendiculaire au plan (Q)

1) monter que les plans (P) et (Q) sont orthogonaux

2)a) déterminer l'équation cartésienne de la sphère (S)

b)déterminer le point de tangence de (P) et (S)

3)a) déterminer le point d'intersection de (Δ) et (Q)

b) Montrer que le plan (Q) coupe la sphère (S) suivant une cercle dont on déterminera le centre et le rayon

Solutions :1)On a : $\vec{n}(1;-1;1)$ Un vecteur normal à (P) et $\vec{n}'(2;3;1)$ Un vecteur normal à (P)

Et on a : $\vec{n}.\vec{n}'=1\times2+(-1)\times3+1\times1=0$

Donc $\vec{n}\perp\vec{n}'$ donc (P) et (Q) sont orthogonaux

2)a)puisque la sphère (S) est tangente au plan (P) Alors : $d(\Omega;(P))=R$

Et on a : $d(\Omega;(P))=\dfrac{|1-2+4|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+1^2}}=\sqrt{3}$

Donc : $R=\sqrt{3}$

Donc l'équation cartésienne de la sphère (S) est : $(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z-4)^2=3$

2)b) le point de tangence H de (P) et (S) est la projection orthogonal Ω sur le plan (P)

donc H est le point d'intersection entre la droite (D) perpendiculaires a (P) passant par Ω et on a : $\vec{n}(1;-1;1)$ Un vecteur normal à (P) donc c'est un vecteur directeur de la droite (D)

la représentation paramétrique de (D) est

$$(D):\begin{cases} x=1+t \\ y=2-t \quad (t\in\mathbb{R}) \\ z=4+t \end{cases}$$

$H\in(D)\cap(P)$ Donc : $(1+t)-(2-t)+4+t=0$

$\Leftrightarrow t=-1$ donc : $H(0;3;3)$

3)a) puisque $(\Delta)\perp(Q)$ alors :

$\vec{n}(1;-1;1)$ Un vecteur directeur de (Δ)

Et on a : $\Omega\in(\Delta)$ donc la représentation paramétrique de (Δ) est $(\Delta):\begin{cases} x=1+2t \\ y=2+3t \quad (t\in\mathbb{R}) \\ z=4+t \end{cases}$

$W(x;y;z)\in(\Delta)\cap(Q)$

donc : $2(1+2t)+3(2+3t)+4+t-6=0$

$\Leftrightarrow t=-\dfrac{3}{7}$ donc : $W\left(\dfrac{1}{7};\dfrac{5}{7};\dfrac{18}{7}\right)$

3°b) Montrons que le plan (Q) coupe la sphère (S) suivant une cercle dont on déterminera le centre et le rayon

on a : $d(\Omega;(Q))=\dfrac{|2+6+4-6|}{\sqrt{2^2+3^2+1^2}}=\dfrac{6}{\sqrt{13}}\prec\sqrt{3}$

le plan (Q) coupe la sphère (S) suivant une cercle de centre H qui est la projection orthogonal du point Ω sur le plan (Q)

et puisque (Δ) passe par Ω est perpendiculaires a (Q) en W alors $W\left(\dfrac{1}{7};\dfrac{5}{7};\dfrac{18}{7}\right)$ est le centre du cercle (C) et le rayon du cercle (C) est $r=\sqrt{R^2-d^2}$

avec $d=d(\Omega;(Q))$ Donc : $r=\sqrt{\dfrac{3}{13}}$

Exercice2: on considère l'ensemble (S_m) des points $M(x;y;z)$ de l'espace qui vérifient l'équations :

(S_m) : $mx^2+my^2+mz^2-2(m-1)x+2y+2z=0$

Avec m un paramètre non nul

1) monter que (S_m) est une sphère pour tout $m\in\mathbb{R}^*$

2) monter que tous les sphères se coupent suivant un seul cercle dont on déterminera le centre et le rayon

Solution : 1) $mx^2+my^2+mz^2-2(m-1)x+2y+2z=0\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-2\left(\frac{m-1}{m}\right)x+\frac{2}{m}y+\frac{2}{m}z=0$$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-2\left(1-\frac{1}{m}\right)x+\frac{2}{m}y+\frac{2}{m}z=0$$

$$\Leftrightarrow\left(x-1+\frac{1}{m}\right)^2+\left(y+\frac{1}{m}\right)^2+\left(z+\frac{1}{m}\right)^2-\left(1-\frac{1}{m}\right)^2-\frac{2}{m^2}=0$$

$$\Leftrightarrow\left(x-1+\frac{1}{m}\right)^2+\left(y+\frac{1}{m}\right)^2+\left(z+\frac{1}{m}\right)^2=\left(1-\frac{1}{m}\right)^2+\frac{2}{m^2}$$

Et puisque : $\left(1-\dfrac{1}{m}\right)^2+\dfrac{2}{m^2}\succ 0$

Alors : (S_m) est une sphère pour tout $m\in\mathbb{R}^*$

de centre $\Omega_m\left(1-\dfrac{1}{m};-\dfrac{1}{m};-\dfrac{1}{m}\right)$ et de rayon

$$R_m=\sqrt{\left(1-\frac{1}{m}\right)^2+\frac{2}{m^2}}$$

2)soit $M(x;y;z)\in(S_m)\quad\forall m\in\mathbb{R}^*$

Donc : $mx^2+my^2+mz^2-2(m-1)x+2y+2z=0\Leftrightarrow$

$m\left(x^2+y^2+z^2-2x\right)+(2x+2y+2z)=0:\forall m\in\mathbb{R}^*\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2-2x=0 \\ 2x+2y+2z=0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} (x-1)^2+y^2+z^2=1 \\ 2x+2y+2z=0 \end{cases}$$

Donc le cercle chercher et l'intersection entre : la sphère (S) : $(x-1)^2+y^2+z^2=1$ et le plan (P) : $2x+2y+2z=0$

en effet le cercle existe car :

$$d(\Omega;(Q))=\frac{|1+0+0|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\prec 1$$

le centre H du cercle est l'intersection entre (P) et la droite (Δ) qui passe par Ω est perpendiculaires a (P) et puisque $(\Delta)\perp(P)$ alors : $\vec{n}(1;1;1)$ Un vecteur directeur de (Δ) Et on a : $\Omega\in(\Delta)$ donc la représentation paramétrique de (Δ) est

$$\begin{cases} x=1+t \\ y=t \\ z=t \end{cases} \quad (t\in\mathbb{R})$$

$H(x;y;z)\in(\Delta)\cap(P)$

donc : $(1+t)+t+t=0$

$\Leftrightarrow t=-\dfrac{1}{3}$ donc : $H\left(\dfrac{2}{3};-\dfrac{1}{3};-\dfrac{1}{3}\right)$

et le rayon du cercle (C) est :

$r=\sqrt{R^2-d^2}=\sqrt{\dfrac{2}{3}}$

Donc : tous les sphères se coupent suivant le cercle (C)

Exo2: dans l'espace $(\mathcal{E})$ est muni d'un repère $(0;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ orthonormé On considère les plan (P_m) d'équations $x+y-z-m=0$ avec m paramètre réel Et la sphère (S) de centre $\Omega(1;2;1)$ et le rayon $R=\sqrt{3}$

1)Etudier et discuter suivant le paramètre m la position relative de la sphère (S) et les plan (P_m)

2)soit (E) l'ensemble des réels m tels que : (P_m) coupe la sphère (S) suivant un cercle (C_m)

Déterminer l'ensemble des centres des cercles (C_m) lorsque m varie dans (E)

Solution : 1) (P_m) : $x+y-z-m=0$

$d_m=d(\Omega;(P_m))=\dfrac{|1+2-1-m|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=\dfrac{|2-m|}{\sqrt{3}}$

$\Leftrightarrow |2-m|\prec 3 \Leftrightarrow -3\prec 2-m\prec 3 \Leftrightarrow -5\prec -m\prec 1$

$\Leftrightarrow -1\prec m\prec 5$

le plan (P_m) coupe la sphère (S) suivant des cercles de centre C_m qui est la projection orthogonal du point Ω sur le plan (P_m)

soit (Δ) la doite qui passe par Ω est perpendiculaires a (P_m) et puisque $(\Delta)\perp(P_m)$ alors : $\vec{n}(1;1;-1)$ Un vecteur directeur de (Δ) Et on a : $\Omega\in(\Delta)$ donc la représentation paramétrique de (Δ) est $\begin{cases} x=1+t \\ y=2+t \\ z=1-t \end{cases} \ (t\in\mathbb{R})$

le centre C_m est le point d'intersection de (Δ) et (P_m)

on va donc résoudre le system $\begin{cases} x=1+t \\ y=2+t \\ z=1-t \\ x+y-z-m=0 \end{cases}$

$1+t+2+t-(-t+1)-m=0 \Leftrightarrow 3t+2-m=0$

$\Leftrightarrow t=\dfrac{m-2}{3}$ donc les coordonnées du centre du cercle

d'intersection est $\begin{cases} x=1+\dfrac{m-2}{3}=\dfrac{m+1}{3} \\ y=2+\dfrac{m-2}{3}=\dfrac{m+4}{3} \\ z=1-\dfrac{m-2}{3}=\dfrac{-m+5}{3} \end{cases}$

$C_m\left(\dfrac{m+1}{3};\dfrac{m+4}{3};\dfrac{-m+5}{3}\right)$ et le rayon est :

et le rayon du cercle (C) est :

$r=\sqrt{R^2-d_m{}^2}$ avec $d_m=\dfrac{|2-m|}{\sqrt{3}}$ et $R=\sqrt{3}$

$r_m=\sqrt{3-\left(\dfrac{|2-m|}{\sqrt{3}}\right)^2} \Leftrightarrow r_m=\sqrt{3-\left(\dfrac{|2-m|}{\sqrt{3}}\right)^2}$

$\Leftrightarrow r_m=\sqrt{\dfrac{9-(2-m)^2}{3}}=\sqrt{\dfrac{9-(m^2-4m+4)}{3}}=\sqrt{\dfrac{-m^2+4m+5}{3}}$

2cas : Si $d(\Omega;(P_m))=\sqrt{3} \Leftrightarrow \dfrac{|2-m|}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$

$\Leftrightarrow |2-m|=3 \Leftrightarrow 2-m=3$ ou $2-m=-3$

$\Leftrightarrow m=-1$ ou $m=5$

la sphère (S) de centre $\Omega(1;2;4)$ et tangente au plan (P_m)

si $m=-1$: le point de tangence T_1 est est le point d'intersection de (Δ) et (P_{-1})

on va donc résoudre le system $\begin{cases} x=1+t \\ y=2+t \\ z=1-t \\ x+y-z+1=0 \end{cases}$

$1+t+2+t-(-t+1)+1=0 \Leftrightarrow 3t+2+1=0$

$\Leftrightarrow t=-1$ donc les coordonnées du point de tangence est $\begin{cases} x=0 \\ y=1 \\ z=2 \end{cases}$ donc $T_1(0;1;2)$

si $m=5$: le point de tangence T_2 est est le point d'intersection de (Δ) et (P_5)

on va donc résoudre le system $\begin{cases} x=1+t \\ y=2+t \\ z=1-t \\ x+y-z-5=0 \end{cases}$

$1+t+2+t-(-t+1)-5=0 \Leftrightarrow 3t+2-5=0$

$\Leftrightarrow t=1$ donc les coordonnées du point de tangence est $\begin{cases} x=2 \\ y=3 \\ z=0 \end{cases}$ donc $T_2(2;3;0)$

3cas : Si $d(\Omega;(P_m)) \succ \sqrt{3} \Leftrightarrow \frac{|2-m|}{\sqrt{3}} \succ \sqrt{3}$

$\Leftrightarrow |2-m| \succ 3 \Leftrightarrow 2-m \succ 3$ ou $2-m \prec -3$

$\Leftrightarrow m \prec -1$ ou $m \succ 5$

$(P_m) \cap (S) = \varnothing$

2) les coordonnées des centres des cercles d'intersections sont $\begin{cases} x=\frac{m+1}{3} \\ y=\frac{m+4}{3} \\ z=\frac{-m+5}{3} \end{cases}$ et $-1 \prec m \prec 5$

c'est une portion de droite

Exo3: dans l'espace $(\mathcal{E})$ est muni d'un repère $(0;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ orthonormé on considère l'ensemble (S_m) des points $M(x;y;z)$ tq : (S_m) :

$x^2+y^2+z^2+mx+2(m-1)y+(m+4)z+1=0$

avec m paramètre réel

1)Montrer que (S_m) est une sphère $\forall m \in \mathbb{R}$

2)Déterminer l'ensemble des centres des (S_m) lorsque m varie dans $\mathbb{R}$

3)Montrer qu'il existe un cercle (C) incluse dans tous les sphères (S_m) $\forall m \in \mathbb{R}$ et Déterminer le plan (P) qui contient ce cercle (C)

4)Soit un point $M_0(x_0;y_0;z_0)$ dans l'espace tq $M_0 \notin (P)$

Montrer qu'il existe une sphère unique qui passe par M_0

5)Montrer qu'il existe deux sphères (S_m) tangentes au plan $(O;x;y)$

Solution : 1)

$x^2+y^2+z^2+mx+2(m-1)y+(m+4)z+1=0$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2+2\frac{m}{2}x+\left(\frac{m}{2}\right)^2-\left(\frac{m}{2}\right)^2+2(m-1)y+(m-1)^2-(m-1)^2$

$+2\left(\frac{m+4}{2}\right)z+\left(\frac{m+4}{2}\right)^2-\left(\frac{m+4}{2}\right)^2+1=0$

$\Leftrightarrow \left(x+\frac{m}{2}\right)^2+(y+m-1)^2+\left(z+\frac{m+4}{2}\right)^2=\left(\frac{m}{2}\right)^2+\left(\frac{m+4}{2}\right)^2+(m-1)^2-1$

$\Leftrightarrow \left(x+\frac{m}{2}\right)^2+(y+m-1)^2+\left(z+\frac{m+4}{2}\right)^2=\frac{4(m-1)^2+(m+4)^2+m^2-4}{4}$

$\Leftrightarrow \left(x+\frac{m}{2}\right)^2+(y+m-1)^2+\left(z+\frac{m+4}{2}\right)^2=\frac{6m^2+16}{4}=R^2$

Et puisque : $\frac{6m^2+16}{4} \succ 0$

Alors : (S_m) est une sphère pour tout $m \in \mathbb{R}$

de centre $\Omega_m\left(-\frac{m}{2};1-m;-\frac{m+4}{2}\right)$ et de rayon

$R_m=\sqrt{\frac{6m^2+16}{4}}=\frac{1}{2}\sqrt{6m^2+16}$

2)Déterminons l'ensemble des centres des (S_m) lorsque m varie dans $\mathbb{R}$

les coordonnées des centres des cercles

d'intersections sont $\begin{cases} x = -\frac{1}{2}m \\ y = -m+1 \\ z = -\frac{1}{2}m - 2 \end{cases} \quad (m \in \mathbb{R})$

c'est une droite de vecteur directeur

$\vec{u}\left(-\frac{1}{2};-1;-\frac{1}{2}\right)$ et qui passe par $A(0;1;-2)$

3)Montrons qu'il existe un cercle (C) incluse dans tous les sphères (S_m) $\forall m \in \mathbb{R}$:

$x^2+y^2+z^2+mx+2(m-1)y+(m+4)z+1=0$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2+mx+2my-2y+mz+4z+1=0$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-2y+4z+1+m(x+2y+z)=0 \quad \forall m \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (S): x^2+y^2+z^2-2y+4z+1=0 \\ (P): x+2y+z=0 \end{cases}$

Donc le cercle chercher et l'intersection entre :

la sphère (S) : $x^2+(y-1)^2+(z+2)^2=2^2$ et le plan

(P) : $x+2y+z=0$

en effet le cercle existe car : $\Omega(0;1;-2)$

$d(\Omega;(P)) = \frac{|0+2-2|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = 0 \prec 2$ donc $\Omega \in (P)$

donc le centre du cercle (C) est : $\Omega(0;1;-2)$

et le rayon est : $R=2$

et tous les sphères se coupent suivant le cercle (C)

et le plan (P) qui contient ce cercle (C) est :

(P) : $x+2y+z=0$

4) soit $M_0(x_0;y_0;z_0)$ dans l'espace tq $M_0 \notin (P)$:

$x+2y+z=0$ donc $x_0+2y_0+z_0 \neq 0$

Montrons qu'il existe une sphère unique qui passe par M_0 :c d a l'existence d'un unique m ?

$M_0 \in (S) \Leftrightarrow x_0^2+y_0^2+z_0^2+mx_0+2(m-1)y_0+(m+4)z_0+1=0$

$M_0 \in (S) \Leftrightarrow x_0^2+y_0^2+z_0^2+mx_0+2(m-1)y_0+(m+4)z_0+1=0$

$\Leftrightarrow x_0^2+y_0^2+z_0^2-2y_0+4z_0+1+m(x_0+2y_0+z_0)=0$

$\Leftrightarrow m(x_0+2y_0+z_0) = -(x_0^2+y_0^2+z_0^2-2y_0+4z_0+1)$

$\Leftrightarrow m = \frac{-(x_0^2+y_0^2+z_0^2-2y_0+4z_0+1)}{x_0+2y_0+z_0}$

6)Montrons qu'il existe deux sphères (S_m) tangentes au plan $(O;x;y)$:

L'équation du plan : $(O;x;y)$ est : $z=0$ donc

$d(\Omega_m;(O;x;y)) = \frac{1}{2}\sqrt{6m^2+16} \Leftrightarrow \frac{\left|-\frac{m+4}{2}\right|}{\sqrt{1}} = \frac{1}{2}\sqrt{6m^2+16}$

$\Leftrightarrow |m+4| = \sqrt{6m^2+16} \Leftrightarrow (m+4)^2 = 6m^2+16$

$\Leftrightarrow m^2+8m+16 = 6m^2+16$

$\Leftrightarrow 5m^2-8m=0 \Leftrightarrow m(5m-8)=0$

$\Leftrightarrow m=0$ ou $m=\frac{8}{5}$ donc il existe deux sphères (S_m) tangentes au plan $(O;x;y)$:

(S_0): $x^2+y^2+z^2-2y+4z+1=0$

$\left(S_{\frac{8}{5}}\right)$: $x^2+y^2+z^2+\frac{8}{5}x+2\left(\frac{8}{5}-1\right)y+\left(\frac{8}{5}+4\right)z+1=0$

Cad : $x^2+y^2+z^2+\frac{8}{5}x+\frac{6}{5}y+\frac{28}{5}z+1=0$

« C'est en forgeant que l'on devient forgeron »
Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices
Que l'on devient un mathématicien

Prof : Atmani najib