

## EXERCICES DE REVISION SUR LIMITES ET DERIVATION

### Exercice 1

La fonction  $f$  est définie sur  $\mathbb{R}$  par:  $f(x) = -x^2 - 5x - 1$ .

- 1) Déterminer les limites de  $f$  en  $-\infty$  et en  $+\infty$ .
- 2.a) Calculer la dérivée et étudier son signe.
- b) Dresser le tableau de variation.
- 3) Déterminer l'équation de la tangente à la courbe au point A d'abscisse 1

### Corrigé de l'exercice 1

- 1)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} -x^2 = -\infty$        $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -x^2 = -\infty$
- 2)  $f'(x) = -2x - 5$

$x$	$-\infty$	$-\frac{5}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$-\infty$	$\frac{21}{4}$	$-\infty$

- 3)  $f'(1) = -7$  donc la tangente a pour équation  $y = -7x + b$   
 De plus  $f(1) = -7$  ; donc  $-7 = -7 \times 1 + b \Rightarrow b = 0$   
 La tangente a pour équation :  $y = -7x$

### Exercice 2

La fonction  $f$  est définie sur  $\mathbb{R}$  par:  $f(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 - 3x + 4$ .

- 1) Déterminer les limites de  $f$  en  $-\infty$  et en  $+\infty$ .
- 2.a) Calculer la dérivée et étudier son signe.
- b) Dresser le tableau de variation.

### Corrigé de l'exercice 2

- 1)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{3} = -\infty$        $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{3} = +\infty$
- 2)  $f'(x) = x^2 - 2x - 3$

Etudions le signe  $x^2 - 2x - 3$

$$\Delta = 4 + 12 = 16 \quad x_1 = \frac{2-4}{2} = -1 \quad x_2 = \frac{2+4}{2} = 3$$

$x$	$-\infty$	$-1$	$3$	$+\infty$	
$x^2 - 2x - 3$	$+$	$0$	$-$	$0$	$+$

$x$	$-\infty$	$-1$	$3$	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	$0$	$-$	$0$	$+$
$f$	$-\infty$	$\nearrow 17/3$	$\searrow -5$	$\nearrow +\infty$	

### Exercice 3

La fonction  $f$  est définie sur  $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$  par:  $f(x) = \frac{2x+5}{x+2}$ .

- 1.a) Déterminer les limites de  $f$  en  $-\infty$  et en  $+\infty$ .
- b) Déterminer  $\lim_{x \rightarrow -2} (2x+5)$  et  $\lim_{x \rightarrow -2} (x+2)$ . Préciser le signe de  $(x+2)$  en fonction de  $x$ .
- c) En déduire les limites suivantes:  $\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x < -2}} f(x)$  et  $\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x > -2}} f(x)$ .
- d) Montrer que la courbe représentative de  $f$  admet deux asymptotes.
- 2.a) Calculer la dérivée.
- b) Dresser le tableau de variation.
- 3) Déterminer l'équation de la tangente à la courbe au point A d'abscisse 0

### Corrigé de l'exercice 3

1.a)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{x} = 2$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x} = 2$

b)  $\lim_{x \rightarrow -2} (2x+5) = 1$

$\lim_{x \rightarrow -2} (x+2) = 0$

Si  $x < -2$  alors  $x+2 < 0$  et si  $x > -2$  alors  $x+2 > 0$

c) D'où:  $\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x < -2}} f(x) = -\infty$  et  $\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x > -2}} f(x) = +\infty$

d) Les droites d'équation  $x = -2$  et  $y = 2$  sont asymptotes à la courbe.

2)

$$f'(x) = \frac{2(x+2) - (2x+5) \times 1}{(x+2)^2} = \frac{-1}{(x+2)^2} < 0$$

$x$	$-\infty$	$-2$	$+\infty$
$f'(x)$	-		-
$f$	2		$+\infty$
		$-\infty$	2

3)  $f'(0) = -\frac{1}{4}$  donc la tangente a pour équation  $y = -\frac{1}{4}x + b$

De plus  $f(0) = \frac{5}{2}$  ; donc  $\frac{5}{2} = -\frac{1}{4} \times 0 + b \Rightarrow b = \frac{5}{2}$

La tangente a pour équation :  $y = -\frac{1}{4}x + \frac{5}{2}$

### Exercice 4

On considère la fonction  $f$  définie par  $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 5}{x + 1}$

1) a) Déterminer l'ensemble de définition  $E$  de  $f$  et les limites aux bornes de  $E$ .

b) En déduire l'équation de l'asymptote verticale à la courbe  $C$  représentative de  $f$ .

2) Montrer que pour tout  $x$  de  $E$ , il existe trois réels  $a$ ,  $b$  et  $c$  tels que  $f$  peut s'écrire

sous la forme:  $f(x) = ax + b + \frac{c}{x+1}$ .

3) a) Déterminer les limites en  $+\infty$  et en  $-\infty$  de la fonction  $g$  définie sur  $E$  par:  $g(x) = f(x) - (ax + b)$

b) Soit  $D$  la droite d'équation  $y = ax + b$  (elle est appelée asymptote oblique).

Étudier les positions relatives de  $D$  et  $C$ .

4) a) Calculer la dérivée.

b) Étudier son signe.

5) Dresser le tableau de variation

### Corrigé de l'exercice 4

1) a) Limites aux bornes.

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\} = ]-\infty; -1[ \cup ]-1; +\infty[.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty.$$

$$\text{De même : } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty.$$

$x$	$-\infty$	$-1$	$+\infty$
$x+1$	-	0	+

On remarque que  $(x + 1)$  change de signe en  $-1$ , on va être amené à séparer l'étude de la limite en  $-1$  en deux cas.

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -1} (x^2 - 3x + 5) = 9 \\ \lim_{x \rightarrow -1} (x + 1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} f(x) = -\infty \\ \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} f(x) = +\infty \end{cases}$$

b) Puisque  $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty$ , la droite d'équation  $x = -1$  est asymptote verticale à la courbe  $C$  représentative de  $f$ .

2) Pour tout  $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

$$ax + b + \frac{c}{x+1} = \frac{(ax+b)(x+1) + c}{x+1} = \frac{ax^2 + (a+b)x + b+c}{x+1}$$

$$\frac{x^2 - 3x + 5}{x+1} = ax + b + \frac{c}{x+1} \Leftrightarrow x^2 - 3x + 5 = ax^2 + (a+b)x + b+c$$

Par identification des coefficients des termes de même puissance, on obtient :

$$\begin{cases} a = 1 \\ a + b = -3 \\ b + c = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -4 \\ c = 9 \end{cases} \quad \text{ainsi} \quad \boxed{f(x) = \frac{x^2 - 3x + 5}{x+1} = x - 4 + \frac{9}{x+1}}$$

3.a)  $g(x) = f(x) - (x - 4) = \frac{9}{x+1}$

On en déduit :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0$

b) La droite  $D$  d'équation  $y = x - 4$  est appelée asymptote oblique à la courbe.

Pour étudier la position relative de  $D$  et  $C$ , on étudie le signe de  $g(x) = \frac{9}{x+1}$

Le signe de  $\left(\frac{9}{x+1}\right)$  ne dépend que du signe de  $(x+1)$

$x$	$-\infty$	$-1$	$+\infty$
$g(x) = \frac{9}{x+1}$		-	+
Positions relatives de $D$ et $C$	C est au-dessous de D		C est au-dessus de D

4.a) Dérivée

$$f'(x) = \frac{(2x-3)(x+1) - (x^2-3x+5) \times 1}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x-8}{(x+1)^2}$$

b) Etudions le signe de  $x^2+2x-8$

$$\Delta = 4 + 32 = 36 \quad x_1 = \frac{-2-6}{2} = -4 \quad x_2 = \frac{-2+6}{2} = 2$$

$x$	$-\infty$	$-4$	$2$	$+\infty$	
$x^2+2x-8$	$+$	$0$	$-$	$0$	$+$

5)

$x$	$-\infty$	$-4$	$-1$	$2$	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	$0$	$-$	$-$	$0$	$+$
$f$	$-\infty$	$-11$	$-\infty$	$+\infty$	$1$	$+\infty$

Voici la courbe qui traduit tout le travail précédent.

